

Capítulo I. Trigonometría

Objetivo

El alumno reforzará los conceptos de trigonometría para lograr una mejor comprensión del álgebra.

Contenido:

- 1.1 Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.
- 1.2 Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.
- 1.3 Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.
- 1.4 Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30, 45 y 60 grados y sus múltiplos.
- 1.5 Identidades trigonométricas.
- 1.6 Teorema de Pitágoras.
- 1.7 Ley de senos y ley de cosenos.
- 1.8 Ecuaciones trigonométricas de primer y segundo grado con una incógnita.

1.1. Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.

Las funciones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

Seno. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen.

Coseno. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen.

Tangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

Cotangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.

Secante. Es la razón entre la distancia al origen y la abscisa.

Cosecante. Es la razón entre la distancia al origen y la ordenada.

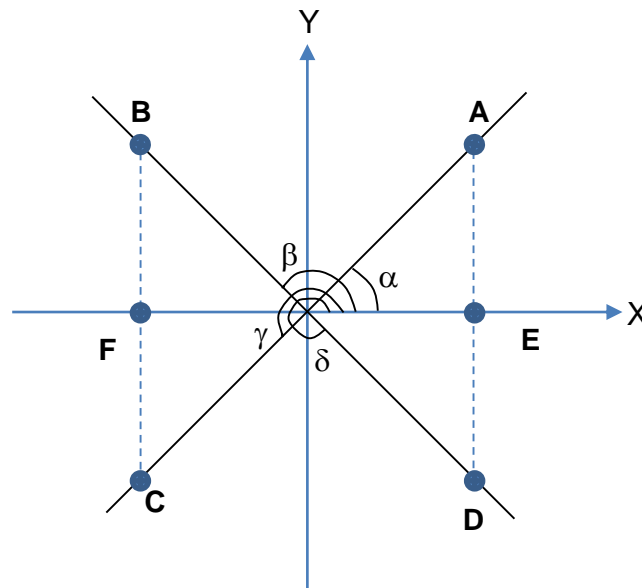


Figura 1. 1. Sistema coordenado empleado para definir las funciones trigonométricas

Considerando un sistema coordenado cartesiano bidimensional y tomando en cuenta 4 puntos, cada uno de ellos en un cuadrante distinto (A en el primer cuadrante, B en el segundo, C en el tercero y D en el cuarto), además de cuatro medidas angulares (α en el primer cuadrante, β en el segundo, γ en el tercero y δ en el cuarto), las funciones trigonométricas quedan definidas de la siguiente manera para cada uno de los cuadrantes.

Primer cuadrante:

Tomando como referencia a la figura 1.1., tenemos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OA}|}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{OA}|}; \quad \text{tan } \alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OE}|}$$

$$\text{csc } \alpha = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AE}|}; \quad \text{sec } \alpha = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OE}|}; \quad \text{cot } \alpha = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{AE}|}$$

Segundo cuadrante:

Tomando como referencia a la figura 1.1., tenemos que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{OB}|}; \operatorname{cos} \beta = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{OB}|}; \operatorname{tan} \beta = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{OF}|}$$

$$\operatorname{csc} \beta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{BF}|}; \operatorname{sec} \beta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OF}|}; \operatorname{cot} \beta = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{BF}|}$$

Tercer cuadrante:

Tomando como referencia a la figura 1.1., tenemos que:

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OC}|}; \operatorname{cos} \gamma = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{OC}|}; \operatorname{tan} \gamma = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OF}|}$$

$$\operatorname{csc} \gamma = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{CF}|}; \operatorname{sec} \gamma = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OF}|}; \operatorname{cot} \gamma = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{CF}|}$$

Cuarto cuadrante:

Tomando como referencia a la figura 1.1., tenemos que:

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OD}|}; \operatorname{cos} \delta = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{OD}|}; \operatorname{tan} \delta = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{OE}|}$$

$$\operatorname{csc} \delta = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{ED}|}; \operatorname{sec} \delta = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|}; \operatorname{cot} \delta = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{DE}|}$$

1.2. Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

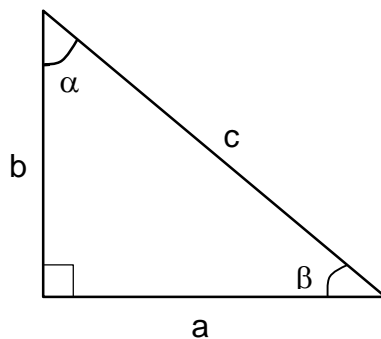


Figura 1. 2. Triángulo rectángulo

Las funciones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

Seno. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

Coseno. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

Tangente. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Cotangente. Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

Secante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

Cosecante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Al utilizar como referencia al triángulo rectángulo de la figura 1.2., se tiene lo siguiente:

Para el ángulo α :

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}; \text{cos } \alpha = \frac{b}{c}; \text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{csc } \alpha = \frac{c}{a}; \text{sec } \alpha = \frac{c}{b}; \text{cot } \alpha = \frac{b}{a}$$

Para el ángulo β :

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c}; \text{cos } \beta = \frac{a}{c}; \text{tan } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{csc } \beta = \frac{c}{b}; \text{sec } \beta = \frac{c}{a}; \text{cot } \beta = \frac{a}{b}$$

1.3 Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

Los signos de las funciones trigonométricas se muestran en la figura 1.3.

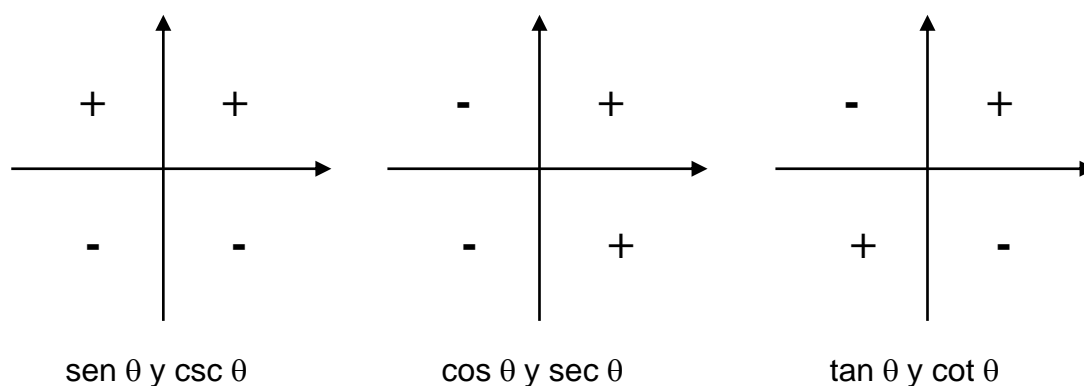


Figura 1.3. Signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

1.4 Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60° y sus múltiplos.

Existen diversos métodos para obtener los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°.

A continuación se muestra la tabla 1.1., el resumen de los principales valores angulares para las seis funciones trigonométricas.

Tabla 1.1. Resumen de los valores de las funciones trigonométricas, para ángulos de 30°, 45°, 60° y sobre los ejes coordenados (0°, 90°, 180° y 270°).

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\infty$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	∞	-1	∞
csc	∞	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1

Estos valores se pueden obtener también a través de los conceptos vistos en el subtema 1.2. y a través de los triángulos equilátero e isósceles de la figura 1.4.

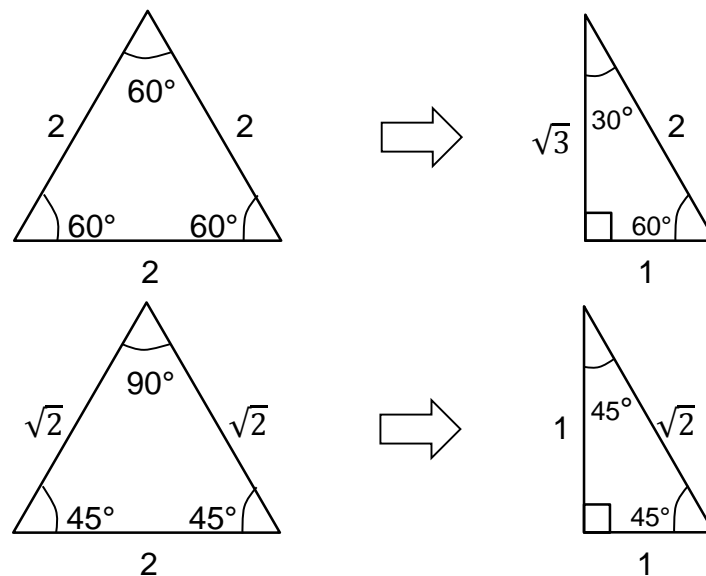


Figura 1.4. Triángulos equilátero e isósceles.

Cuando se tienen valores superiores a los 90° , es decir para valores angulares en el segundo, tercero y cuarto cuadrante, se deben reducir los ángulos al primer cuadrante (ya que son equivalentes), de la siguiente manera:

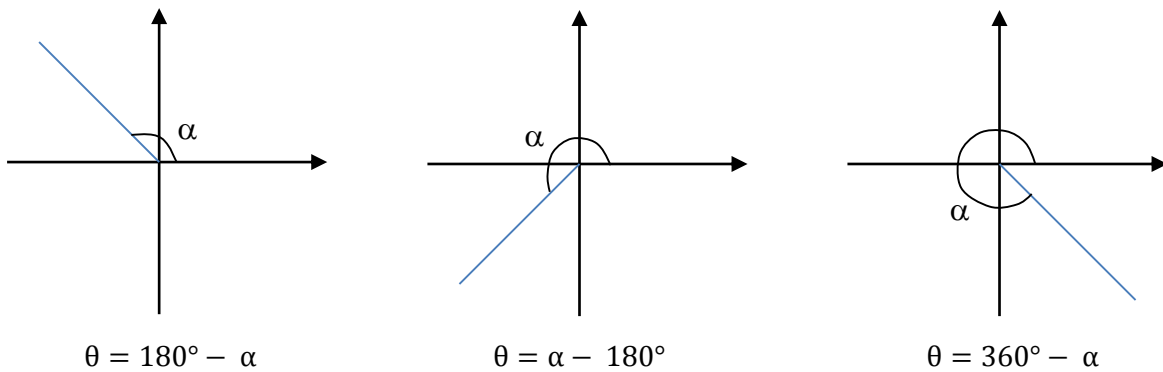


Figura 1.5. Reducción de ángulos al primer cuadrante.

1.5 Identidades trigonométricas.

1.5.1. Pitagóricas

Para obtener las identidades trigonométricas, haremos uso de un círculo unitario con centro en el origen, también llamado círculo trigonométrico (ver figura 1.6.).

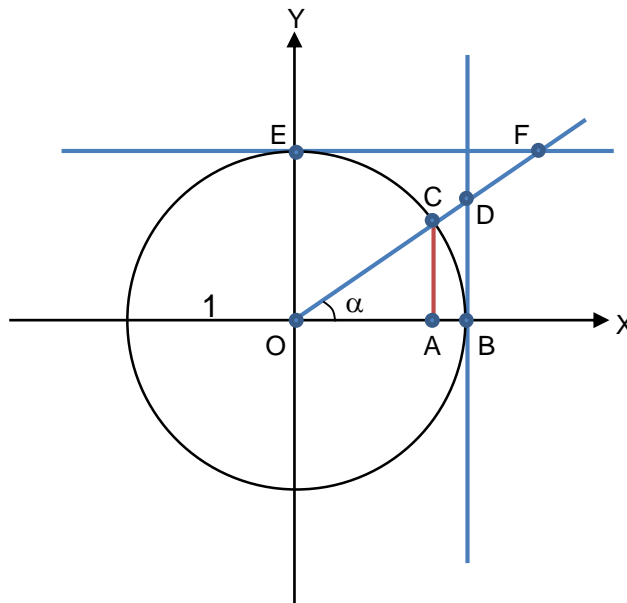


Figura 1.6. Círculo trigonométrico.

Del triángulo **OAC**:

a) $\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}$; Pero $|\overline{OC}| = 1 \therefore \sin \alpha = \overline{AC}$
b) $\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$; Pero $|\overline{OC}| = 1 \therefore \cos \alpha = \overline{OA}$

c) Aplicando el T. de Pitágoras: **$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$**

Del triángulo **OBD**:

a) $\tan \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$; Pero $|\overline{OB}| = 1 \therefore \tan \alpha = \overline{BD}$
b) $\sec \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$; Pero $|\overline{OB}| = 1 \therefore \sec \alpha = \overline{OD}$

c) Aplicando el T. de Pitágoras: **$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$; $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$**

Del triángulo **OFE**:

a) $\csc \alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}$; Pero $|\overline{OE}| = 1 \therefore \csc \alpha = \overline{OF}$
b) $\cot \alpha = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}}$; Pero $|\overline{OE}| = 1 \therefore \cot \alpha = \overline{EF}$

c) Aplicando el T. de Pitágoras: **$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$; $\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$**

Ej 1. Demostrar numéricamente las 3 identidades pitagóricas.

1.5.2. Suma y diferencia de ángulos.

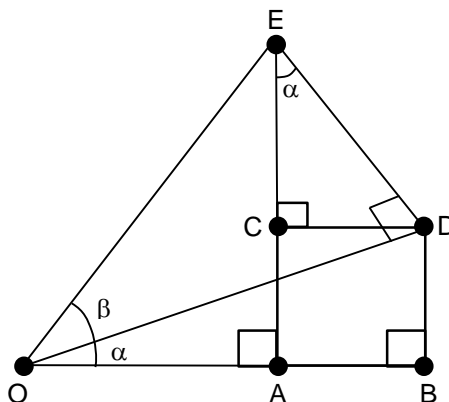


Figura 1.7. Suma y diferencia de ángulos para las funciones trigonométricas.

De la figura 1.7., y tomando como referencia el triángulo **OAE**:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{AC}| + |\overline{CE}|}{|\overline{OE}|} \dots 1; \text{ Pero } \overline{AC} = \overline{BD} \therefore \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{BD}| + |\overline{CE}|}{|\overline{OE}|} \dots 2$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OE}|} \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OD}|} + \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{OE}|} \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{ED}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OD}|} \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|} + \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{ED}|} \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OE}|} \dots 3$$

Simplificando (3) con base en la figura 1.7.: $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$

De la figura 1.7., y tomando como referencia el triángulo **OAE**:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OE}|} \dots 1; \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}; \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB}; \overline{AB} = \overline{CD} \therefore \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{CD} \dots 2$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{|\overline{OB}| - |\overline{CD}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OE}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OE}|} \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OD}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OE}|} \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{ED}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OD}|} \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{ED}|} \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OE}|} \dots 3$$

Simplificando (3) con base en la figura 1.7.: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta$

$$\text{Sabemos que } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta}$$

$$\text{Multiplicando por } \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta}: \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Ej 2. Obtener los valores de sen, cos y tan para 15° y 75° .

Ej 3. Determinar los valores numéricos de las siguientes expresiones trigonométricas.

- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$
- $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) =$
- $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
- $\text{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) =$

1.5.3. Funciones pares e impares

Funciones pares: Son aquellas funciones simétricas respecto al eje coordenado horizontal (abscisas).

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \sec(-\alpha) = \sec\alpha$$

Funciones impares: Son aquellas funciones simétricas respecto al eje coordenado vertical (ordenadas).

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha; \csc(-\alpha) = -\csc\alpha; \tan(-\alpha) = -\tan\alpha; \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

Ej 4. Obtener:

- a) $\text{sen}(\alpha - \beta)$
- b) $\text{cos}(\alpha - \beta)$
- c) $\text{tan}(\alpha - \beta)$
- d) $\text{sen}(2\alpha)$
- e) $\text{cos}(2\alpha)$
- f) $\text{tan}(2\alpha)$

Ej 5. Demostrar que se cumplen las siguientes igualdades

- a) $\text{sen}(-x) \text{tan}(-x) + \text{cos}(-x) = \text{sec}(-x)$
- b) $\text{sen}(-x) \text{sec}(-x) = \text{tan}(-x)$
- c) $\text{csc}(-x) \text{cos}(-x) = -\text{cot}(x)$
- d) $\frac{\text{cot}(-x)}{\text{csc}(-x)} = \text{cos}(x)$
- e) $\frac{\text{sec}(-x)}{\text{tan}(-x)} = -\text{csc}(x)$
- f) $\frac{1}{\text{cos}(-x)} - \text{tan}(-x)\text{sen}(-x) = \text{cos}(x)$
- g) $\text{cot}(-x) \text{cos}(-x) + \text{sen}(-x) = -\text{csc}(x)$
- h) $\text{sec}(x) - \text{cos}(x) = \text{sen}(x) \text{tan}(x)$
- i) $\text{sen}(x) [\text{tan}(x) + \text{cot}(x)] = \text{sec}(x)$
- j) $\frac{\text{cos}(x)}{1-\text{sen}(x)} = \frac{1+\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$

1.6 Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras: La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Haciendo uso de la Figura 1.2., tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Conversión de grados a radianes

Ej 6. Partiendo de la igualdad: $\pi = 180^\circ$, obtener:

- 1) $\text{cos}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- 2) $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- 3) $\text{tan}(-\pi)$
- 4) $\text{cot}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- 5) $\text{sec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- 6) $\text{csc}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

1.7 Ley de senos y ley de cosenos.

Ambas leyes (teoremas) son aplicables para triángulos oblicuángulos (ver figura 1.8.).

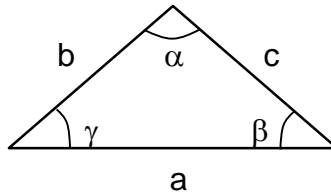


Figura 1.8. Triángulo oblicuángulo.

Ley de los senos

Los lados de un triángulo (ver figura 1.6.) son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, matemáticamente queda expresado de la siguiente manera:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Ley de los cosenos

El cuadrado del lado de un triángulo (ver figura 1.6.) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman, matemáticamente queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

1.8 Ecuaciones trigonométricas de primer y segundo grado con una incógnita.

Son ecuaciones que involucran funciones trigonométricas, pero que se resuelven de la misma forma que se resuelven las ecuaciones de primer y segundo grado que involucran literales como incógnitas.