Capitulo II. Números Reales

Objetivo

El alumno aplicará las propiedades de los números reales y sus subconjuntos, para demostrar algunas proposiciones por medio del método de inducción matemática y para resolver inecuaciones.

Contenido:

2.1 El conjunto de los números naturales: Concepto intuitivo de número natural. Definición del conjunto de los números naturales mediante los postulados de Peano. Definición y propiedades: adición, multiplicación y orden en los números naturales. Demostración por Inducción Matemática.

2.2 El conjunto de los números enteros: Definición a partir de los números naturales. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los enteros. Representación de los números enteros en la recta numérica.

2.3 El conjunto de los números racionales: Definición a partir de los números enteros. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los racionales. Expresión decimal de un número racional. Algoritmo de la división en los enteros. Densidad de los números racionales y representación de éstos en la recta numérica.

2.4 El conjunto de los números reales: Existencia de números irracionales (algebraicos y trascendentes). Definición del conjunto de los números reales; representación de los números reales en la recta numérica. Propiedades: adición, multiplicación y orden en los reales. Completitud de los reales. Definición y propiedades del valor absoluto. Resolución de desigualdades e inecuaciones.

Introducción

Estudio de los números reales
- Método constructivo ($N \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow R$)
- Enfoque axiomático

II.1. NÚMEROS NATURALES (N)

Postulados de Peano

El conjunto de los números naturales (**N**) es tal que:

1) $1 \in$ **N**
2) Para cada n $\exists$ un único **n*** $\in$ **N,** llamado el **siguiente de n**
3) Para cada n $\in$ **N** se tiene que **n*** $\neq$ **1**
4) Si m, n $\in$ **N** y **m* = n*** entonces m = n
5) Todo subconjunto S de **N**, que tenga las propiedades:
  a) $1 \in S$
  b) $k \in S$, implica que $k^* \in S$
Es el mismo subconjunto **N**. (Principio de inducción)

Operaciones para los números naturales

Adición en N

Definición: Para dos números n y m $\in$ **N**, se tiene que:
1) $n + 1 = n^*$
2) $n + m^* = (n + m)^*$

Multiplicación en N

Definición: Para dos números n y m $\in$ **N**, se tiene que:
1) $n \cdot 1 = n$
2) $n \cdot m^* = (n\,m) + n$

Propiedades de la adición y multiplicación en N

1) $m + n \in$ **N**	$m \cdot n \in$ **N**	**…Cerradura**
2) $m + (n + p) = (m + n) + p$	$m\,(n\,p) = (m\,n)\,p$	**… Asociatividad**
3) $m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	**… Conmutatividad**
4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$	Si $m\,p = n\,p \rightarrow m = n$	**… Cancelación**
5) $m\,(n + p) = m\,n + m\,p$		**… Distributiva**

Inducción matemática

Sirve para demostrar la validez de cualquier enunciado relativo a N, basándose en el quinto postulado de Peano.

Ejercicios tipo 1, sumatoria.

1) $\{ x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbf{N} \} \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2 \; ; \; \forall n \in \mathbf{N}$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \; ; \; \forall n \in \mathbf{N}$

3) $2 + 6 + 12 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \; ; \; \forall n \in \mathbf{N}$

4) $\frac{2}{1(2)}+\frac{2}{2(3)}+\frac{2}{3(4)}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2n}{n+1}$; $\forall$ n $\in$ **N**

5) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$; $\forall$ n $\in$ **N**

6) $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n-1)$; $\forall$ n $\in$ **N**

Ejercicios tipo 2, multiplicación.

1) $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\ldots(1+\frac{1}{n}) = n+1\,;\ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$

2) $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{25})\ldots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}\,;\ \ \forall\, n \geq 2$

Ejercicios tipo 3, divisibles.

1) $2^{4n}-1$ es divisible entre 15; $\forall n \in \mathbf{N}$

2) $6^{n}-1$ es divisible entre 5; $\forall n \in \mathbf{N}$

3) $2^{2n}+5$ es divisible entre 3; $\forall n \in \mathbf{N}$

4) $7*16^{n-1}+3$ es divisible entre 5; $\forall n \in \mathbf{N}$

5) $10^{n+1}+3*10^{n}+5$ es divisible entre 9; $\forall n \in \mathbf{N}$

6) $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ es divisible entre 12; $\forall n \in \mathbf{N}$

Ejercicios tipo 4, enunciados.

1) $n + n^2$ es un número par; $\forall$ n $\in$ **N**

2) Cualquier polígono de n lados tiene D diagonales, donde D=$\frac{1}{2}n(n-3)$

3) $\frac{2}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) \in \mathbf{N}$; $\forall$ n $\in$ **N**

Ejercicios tipo 5, trigonométricos.

1) cos [(2n-1) π]=-1; $\forall$ n $\in$ **N**

2) (cos x) (cos 2x) (cos 4x)….(cos 2^{n-1} X) = $\frac{sen 2^n x}{2^n senx}$; $\forall$ n $\in$ **N**

Orden en los naturales

Ley de la tricotomía
Si m y n $\in$ **N**, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:
1) $n < m$
2) $n = m$
3) $n > m$

Teorema: Para toda m, n y p $\in$ **N**:
1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
2) $m < n \rightarrow m\,p < n\,p$
3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

II.1. NÚMEROS ENTEROS (Z)

Dados dos números naturales n y m, si:

$$n + x = m \rightarrow x = m - n$$

Se pueden presentar tres casos:
1) $m > n \rightarrow x \in$ **N**
2) $m = n \rightarrow x = 0; x \in$ **Z**
3) $m < n \rightarrow x < 0; x \in$ **Z**

Definición:
$Z=\{x \mid x = m - n$; con m, n x $\in$ **N**$\}$ $\quad \therefore N \subset Z$

Propiedades de la adición y multiplicación en Z

1) $m + n \in$ **Z**	$m \cdot n \in$ **Z**	**…Cerradura**
2) $m + (n + p) = (m + n) + p$	$m\,(n\,p) = (m\,n)\,p$	**… Asociatividad**
3) $m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	**… Conmutatividad**
4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$	Si $m\,p = n\,p \rightarrow m = n$	**… Cancelación**
5) $m + 0 = m$	$m * 1 = m$	**… Elementos idénticos**
6) $m + (-m) = 0$		**… Elementos inversos**
7) $m\,(n + p) = m\,n + m\,p$		**… Distributiva**

Orden en los enteros

Teorema: Para toda m, n y p $\in$ **N**:
1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $\quad m\,p < n\,p$
Si $p < 0$: $\quad m\,p > n\,p$
3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

II.1. NÚMEROS RACIONALES (Q)

Dados dos números enteros a y b, si:

$$b\,x = a \rightarrow x = \frac{a}{b}$$

Se pueden presentar tres casos:
1) b es factor de a → x $\in$ **N**
2) b NO es factor de a, con b $\neq 0$ → x $\in$ **Q**
3) b = 0 y a $\neq 0$: $\frac{a}{b} \to \infty$

b = 0 y a = 0: $\frac{a}{b}$ es indeterminado

Definición:
Q ={x | x = $\frac{a}{b}$; con a, b $\in$ **Z** y b $\neq 0$ } $\therefore Z \subset Q$

<u>Propiedades de la adición y multiplicación en Q</u>

1) m + n $\in$ **Z**	m · n $\in$ **Z**	**…Cerradura**
2) m + (n + p) = (m + n) + p	m (n p) = (m n) p	**… Asociatividad**
3) m + n = n + m	m · n = n · m	**… Conmutatividad**
4) Si m + p = n + p → m = n	Si m p = n p → m = n	**… Cancelación**
5) m + 0 = m	m * 1 = m	**… Elementos idénticos**
6) m + (-m) = 0	m * (1/m) = 1	**… Elementos inversos**
7) m (n + p) = m n + m p		**… Distributiva**

<u>Operaciones sobre números racionales</u>

Suma y resta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Teorema: Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Algoritmo de la división para los números enteros
Dados dos números enteros a y b con b > 0, existen dos enteros q y r, con $0 \leq r < b$, tal que:

$$a = b\,q + r$$

Densidad de los números racionales
Entre dos números racionales diferentes siempre hay otro número racional.
Teorema. $\forall$ X, Y $\in Q$ con X < Y, $\exists$ Z $\in Q$ tal que:

$$X < Z < Y$$

Ejemplo: Determinar los valores de a y b $\in$ **Z**, tales que:

1) $\frac{a}{b} = 1.08333\ldots$

2) $\frac{a}{b} = 0.8333\ldots$

3) $\frac{a}{b} = 0.7333\ldots$

4) $\frac{a}{b} = 1.772727\ldots$

5) $\frac{a}{b} = 0.9999\ldots$

6) $\frac{a}{b} = 0.5555\ldots$

7) $\frac{a}{b} = 0.3636\ldots$

8) $\frac{a}{b} = 1.4066\ldots$

9) $\frac{a}{b} = 1.259259\ldots$

10) $\frac{a}{b} = 0.1666\ldots$

11) $\frac{a}{b} = 0.875$

12) $\frac{a}{b} = 0.2222\ldots$

13) $\frac{a}{b} = 0.625$

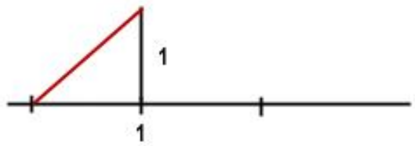
14) $\frac{a}{b} = 2.3333\ldots$

15) $\frac{a}{b} = 0.4285714285\ 71\ldots.$

Números Reales (**R**)

Al hacer uso del teorema sobre la **Densidad de los números racionales**, parecería que los números racionales cubren por completo la recta numérica, pero esto no es así.

A partir de proyecciones geométricas como la que se muestra a continuación sabemos que existen otros números llamados irracionales (**Q’**), que ocupan espacios en la recta numérica.



Números Irracionales (**Q’**)

Se clasifican en: **Algebraicos** (raíces: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.) y **trascendentes** (π y e).

Los números irracionales son expresiones decimales no periódicas.

Números reales

Los números reales quedan definidos como la unión de racionales e irracionales, es decir:

R = Q U Q’

Orden en R

<u>Orden en los reales</u>

Teorema: Para toda m, n y p $\in$ **R**:

1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$

2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $mp < np$

Si $p < 0$: $mp > np$

3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

Valor absoluto y sus propiedades

Definición: Sea x un número real. El valor absoluto de x, que representamos con |x|, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades más importantes del valor absoluto se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema:
Para todo x, y $\in R$:

i) $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0$ si $x=0$
ii) $|xy| = |x|\,|y|$
iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Teorema:
Sea $\alpha \in R$ con $\alpha \geq 0$; $\forall\, x \in R$ se tiene que:
$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$

De manera general para cualquier expresión p en términos de x:

$$|p| > \alpha \quad \begin{cases} p > \alpha \text{ (Desigualdad 1)} \\ p < -\alpha \text{ (Desigualdad 2)} \end{cases}$$

Unión de desigualdades

$$|p| < \alpha \quad \begin{cases} p < \alpha \text{ (Desigualdad 1)} \\ p > -\alpha \text{ (Desigualdad 2)} \end{cases}$$

Intersección de desigualdades

Desigualdades:

1. $-3+5X > -2X+11$; $Solución$: $X \in (2\,,\infty)$ ó $X > 2$
2. $\frac{1}{2}+3X < -4X+\frac{1}{3}$; $Solución$: $X \in (-\infty,-\frac{1}{42})$
3. $\frac{2X-1}{X+2} < 5\ con\ X \neq -2$; $Solución$: $X \in \left(-\infty,-\frac{11}{3}\right) \cup (-2\,,\infty)$
4. $\frac{2X-3}{X+2} < \frac{1}{3}\ con\ X \neq -2$; $Solución$: $X \in \left(-2,\frac{11}{5}\right)$
5. $\frac{3}{X} < 5\ con\ X \neq 0$; $Solución$: $X \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{3}{5}\,,\infty\right)$
6. $\frac{3X+8}{X-4} < 2\ con\ X \neq 4$; $Solución$: $X \in (-16\,,4)$
7. $X^2-X-2 > 0$; $Solución$: $X \in (-\infty\,,-1) \cup (2\,,\infty)$
8. $(3X+2)^2 < X(X-6)$; $Solución$: $X \in (-2\,,-\frac{1}{4})$
9. $(3X-1)(2X+4) < (3X-1)(X+5)$; $Solución$: $X \in \left(-\infty\,,\frac{1}{3}\right) \cup (1\,,\infty)$
10. $3+|X-2| > 4$; $Solución$: $X \in (-\infty\,,1) \cup (3\,,\infty)$
11. $2|X-3|-3 > -\frac{2}{3}|X-3|-2$; $Solución$: $X \in \left(-\infty\,,\frac{21}{8}\right) \cup \left(\frac{27}{8}\,,\infty\right)$
12. $|X^2-16| > 0$; $Solución$: $X \in R\ con\ X \neq \mp 4$
13. $-|3X-2| > -2$; $Solución$: $X \in \left(0\,,\frac{4}{3}\right)$
14. $|4X-1| < |2-X|$; $Solución$: $X \in \left(-\frac{1}{3}\,,\frac{3}{5}\right)\ con\ X \neq \frac{1}{4}\ en\ una\ solución$
15. $|3-2X| < |2+X|$; $Solución$: $X \in \left(\frac{1}{3}\,,5\right)\ con\ X \neq \frac{3}{2}\ en\ una\ solución$