Capitulo III. Números Complejos

Objetivo

El alumno usará los números complejos en sus diferentes representaciones y sus propiedades, para resolver ecuaciones con una incógnita que contengan números complejos.

Contenido

3.1 Forma binómica: Definición de número complejo, de igualdad y de conjugado. Representación gráfica. Operaciones y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación y división. Propiedades del conjugado.

3.2 Forma polar o trigonométrica: Transformación de la forma binómica a la polar y viceversa. Definición de módulo, de argumento y de igualdad de números complejos en forma polar. Operaciones en forma polar: multiplicación, división, potenciación y radicación.

3.3 Forma exponencial o de Euler: Equivalencia entre la forma polar y la exponencial. Operaciones en forma exponencial: multiplicación, división, potenciación y radicación.

3.4 Resolución de ecuaciones con una incógnita que involucren números complejos.

Introducción

Si $x^2 + c = 0 \rightarrow x = \sqrt{c}\sqrt{-1} = \sqrt{c} \cdot i$

Definición

C= { **Z** | **Z= a + b i**, con a, b $\in$ R, i^2 =-1}

Tipos de números complejos

- Forma binómica o algebraica (**Z= a + b i**)
  Conviene usarse en: Suma y resta
- Forma Polar o Trigonométrica (**Z = r cis θ**)
  Conviene usarse en: Multiplicación, división, potencia y raíz enésima
- Forma Euler o Exponencial (**Z = r e** $^{\theta i}$)
  Conviene usarse en: Multiplicación, división, potencia y raíz enésima

Conjugado de un número complejo

Si z = a + b i $\rightarrow$ $\bar{z}$ **= a - b i y se representa como** $\bar{z}$ **.**

Propiedades del conjugado complejo

Para todo Z_1 y Z_2 ϵ C:

1) $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$
2) $Z_1 = \bar{Z}_1$ si $Z_1 \epsilon R$
3) $Z_1 + \bar{Z}_1 \epsilon R$
4) $Z_1\bar{Z}_1 \epsilon R$
5) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$
6) $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$

Operaciones con números complejos binómicos

Si Z_1 = a + b i y Z_2 = c + d i, entonces:

Adición: $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$

Sustracción: $Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)\, i$

Multiplicación: $Z_1 Z_2 = (a + b i)(c + d i) = (a c - b d) + (a d + b c)\, i$

División: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Propiedades de las operaciones con complejos

Se cumplen las propiedades: **Cerradura, asociatividad, conmutatividad, elementos idénticos, elementos inversos y distributividad.**

Diagrama de Argand

Para representar a los números complejos se utiliza un sistema coordenado bidimensional llamado “Diagrama de Argand”, el eje horizontal es el eje de los Reales, mientras que el vertical es el de los imaginarios.

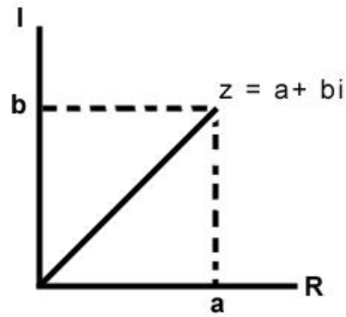


Diagrama de Argand

Ejemplo 1:
Sean Z_1= -5 - 2i y Z_2 = -1 + i, obtener:

a) $Z_1 + Z_2=$
b) $Z_1 - Z_2=$
c) $Z_1 \ Z_2=$
d) $Z_1 / Z_2=$

Ejemplo 2:
Si Z_1= -i, Z_2 = 3 y Z_3 = $\sqrt{2} - i$, obtener:

a) $\dfrac{Z_2}{Z_1} - Z_3 =$

b) $\dfrac{\overline{Z_1} \cdot Z_2}{Z_1 \cdot \overline{Z_3}} =$

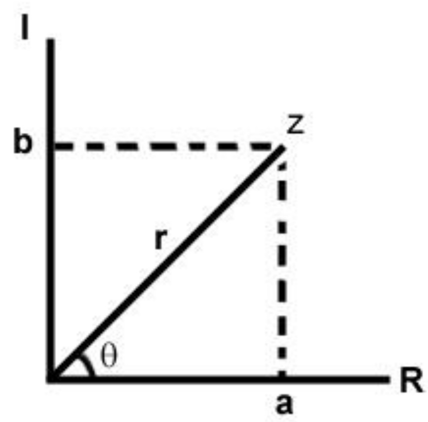
Ejemplo 3:

a) $\dfrac{i^2 + i^4 + i^6}{i^3 + i^5 + i^7} =$

b) $\dfrac{\overline{(2-i)} + (2+i)\cdot(1+i)}{(2-4i)\cdot(2+i)} =$

c) $\dfrac{(1-3i)\cdot(4-i)^2 + (4-i)\cdot(-1+5i)}{(4-i)\cdot i}$

Forma polar o trigonométrica de un número complejo



De la figura anterior, se obtienen las ecuaciones de transformación:

De Polar a Binómica:
$a = r \cos \theta$
$b = r \operatorname{sen} \theta$

De Binómica a Polar:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \operatorname{angtan}(\frac{b}{a})$

Ejemplo:
Sean $Z_1 = -1 + i$ y $Z_2 = 2 \text{ cis } 240°$, para Z_1 obtener su forma polar y para Z_2 su forma binómica:

Igualdad de números complejos en su forma polar

Teorema: Sean $Z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $Z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$
$Z_1 = Z_2$ si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + k\,(360°)$ con k=…-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

Ejemplo: Transformar a binómica $Z_1 = \sqrt{2} cis 750°$

Ejemplo:
1.- Transformar a forma polar:

a) $Z_1 = 2 - 2i$ **b)** $Z_2 = -3$ **c)** $Z_3 = 5i$ **d)** $Z_4 = -2i$ **e)** $Z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

2.- Transformar a forma binómica:
a) $Z_1 = \text{cis } 510°$ **b)** $Z_2 = 4 \text{ cis } 210°$ **c)** $Z_3 = 2\sqrt{2} \text{ cis } 315°$

Operaciones con números complejos polares

Si $Z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ y $Z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$, entonces:

Multiplicación: $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$

División: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$

Potencia enésima: $Z_1^n = r_1^n \text{ cis } (n\,\theta_1)$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot cis[\frac{\theta + k \cdot 360°}{n}]$ con k= 0, 1, 2, …, (n-1)

Ejemplo: Obtener las raíces cúbicas de $Z = -4\sqrt{3} - 4i$

Ejemplo: Obtener los valores de x tales que $x^3 + 64 = 0$

Ejemplo: Efectuar la siguiente operación; $(1 - i)^4 \cdot \frac{2 \cdot cis 60°}{-\sqrt{3} + i} =$

Ejemplo: Obtener Z en forma binómica, para que se cumpla la siguiente ecuación:

$$4Z = 2\overline{Z} + (\sqrt{3} - i)^6 (\frac{1}{8} cis30°)$$

Forma Euler o exponencial de un número complejo

En el siglo XVIII el matemático suizo Leonard Euler, estableció la siguiente relación:

$$e^{\theta \cdot i} = \cos\theta + i \cdot sen\theta$$

$$\therefore Si \quad Z = rcis\theta \quad \Rightarrow \quad Z = r \cdot e^{\theta \cdot i}$$

Operaciones en C en su forma exponencial

Dados dos números complejos $Z_1 = r_1 e^{\alpha \cdot i}$ y $Z_2 = r_2 e^{\beta \cdot i}$

Multiplicación: $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\alpha+\beta)\cdot i}$

División: $\frac{Z_1}{Z_2} \cdot = \frac{r_1}{r_2} \cdot \cdot e^{(\alpha-\beta)\cdot i}$

Potencia: $Z_1{}^n = r_1{}^n \cdot e^{n\alpha \cdot i}$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{Z_1} = \sqrt[n]{r_1} \cdot e^{[\frac{\alpha + k2\pi}{n}]\cdot i}$

Ejemplo: Dados los siguientes números complejos:
$Z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$, $Z_2 = e^{\pi i}$, $Z_3 = 8e^{3\pi i}$, $Z_4 = 5e^{\frac{4\pi}{3}i}$, realizar las siguientes operaciones:

a) $Z_1 Z_2 =$

b) $\frac{Z_1}{Z_2} =$

c) $(Z_3)^{\frac{2}{3}} =$

d) $\frac{Z_1+Z_2}{Z_4} =$

Ejemplo: Representar en el diagrama de Argand las soluciones de la ecuación:

$$\frac{4-4i}{Z^{\frac{3}{4}}} = 2e^{\pi i}$$

Ejercicios de ecuaciones simultáneas y cuadráticas.

1. Determinar los valores de X, Y ∈ R.

$$(X-2i)cis180° + (2+Yi)e^{\frac{\pi}{4}i} = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$$

2. Resolver la ecuación:

$$(2+i)X^2 - (5-i)X + (2-2i) = 0$$