Capitulo 5. Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivo

El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss.

Contenido

5.1 El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas. Definición de ecuación lineal y de su solución. Definición de sistema de ecuaciones lineales y de su solución. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en cuanto a la existencia y al número de soluciones. Sistemas homogéneos, soluciones triviales y varias soluciones.

5.2 Sistemas equivalentes y transformaciones elementales. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

5.1.1. Definición

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas sobre C es una expresión de la forma:

$$\begin{gathered} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m \end{gathered}$$

5.1.2. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \text{Compatibles (Con solución)} & \begin{cases} \text{Determinados (única)} \\ \text{Indeterminados (múltiples)} \end{cases} \\ \text{Incompatibles (Sin solución)} & \end{cases}$$

5.1.2. Interpretación geométrica de los sistemas de orden 2 y orden 3

Orden 2: Cada ecuación representa una línea recta, estas pueden:

a) Intersectarse en un punto (sistema compatible determinado)
b) Ser coincidentes (sistema compatible indeterminado)
c) Ser paralelas (sistema incompatible)

Orden 3: Cada ecuación representa un plano, estos pueden:

a) Intersectarse en un punto (sistema compatible determinado)
b) Intersectarse formando una recta (sistema compatible indeterminado)
c) Ser paralelos, formar tres rectas o una recta y un plano paralelos (sistema incompatible)

5.1.3. Sistemas homogéneos

Es un sistema en el cual TODOS los términos independientes son cero, es siempre compatible y acepta la solución "trivial" en la cual:

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = 0$$

5.2.1. Método de Gauss

Objetivo: Llega r aun sistema escalonado.
Procedimiento: Transformar el sistema en una matriz y aplicarle una serie de transformaciones hasta lograr el escalonamiento.

Escalonamiento: La matriz está escalonada si el número de ceros anteriores al primer elemento no nulo de cada renglón aumenta al pasar de un renglón al siguiente, hasta llegar eventualmente a renglones cuyos elementos son todos nulos.

Para lograr el escalonamiento en una matriz, es necesario aplicar las siguientes transformaciones:

Transformaciones elementales

a) Intercambiar dos renglones.
b) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero.
c) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero y sumarlo a otro renglón, reemplazando este último por el resultado obtenido.

Cuando dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones, se dice que son **equivalentes**.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} X + Y + 2Z &= 3 \\ 3X + 4Y + Z &= -1 \\ -2X - 4Y - Z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: X= -1, Y= 0, Z= 2

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} 2X + Y - Z &= -4 \\ -X + 2Z &= 7 \\ 3X - 2Y - Z &= 3 \end{aligned}$$

Solución: X= 1, Y= -2, Z= 4

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z &= -5 \\ -Y + 2Z &= 5 \\ -2X + Y &= -11 \\ 3X + Z &= 13 \end{aligned}$$

Solución: X= 4, Y= -3, Z= 1

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned} 3a + 3b - c + d + 4e &= 4 \\ a + b + c - 2d - e &= 1 \\ -2a - 2b + 2c - 3d - 5e &= -3 \end{aligned}$$

Solución: Sistema compatible indeterminado

Nota: El número de variables dependientes en un sistema compatible indeterminado, es igual al número de ecuaciones no nulas en la matriz escalonada.

Ejemplo 5.

$$\begin{aligned} b - c &= 3 \\ 3a + b + 2c + d &= 6 \\ a + c &= 0 \\ 2a + b + c + d &= 6 \end{aligned}$$

Solución: Sistema compatible indeterminado

Ejemplo 6.

$$\begin{aligned} a + 2b - 3c + 2d &= -1 \\ -a - 2b + 2c - 5d &= 1 \\ 2a + 4b - 5c + 7d &= -2 \end{aligned}$$

Solución: Sistema compatible indeterminado

Ejemplo 7.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3z &= -2 \\ -x + 2y - 4z &= 4 \\ 3x + 2y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Solución: Sin solución

Ejemplo 8.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 4x - 2y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Solución: Sin solución

Ejemplo 9. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= \alpha \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

Obtener los valores de $\alpha \in R$ para que el sistema sea:

a) Compatible determinado ($\alpha \neq 3$)
b) Compatible indeterminado ($\alpha = 3$)
c) Incompatible

Ejemplo 10. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + \beta z &= 1 \\ x + \beta y + z &= 1 \\ \beta x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

Obtener los valores de $\alpha \in R$ para que el sistema sea:

a) Compatible determinado ($\beta \neq -2, 1$)
b) Compatible indeterminado ($\beta = -2$)
c) Incompatible ($\beta = 1$)