

Capítulo II. Números Reales

Objetivo

El alumno aplicará las propiedades de los números reales y sus subconjuntos, para demostrar algunas proposiciones por medio del método de inducción matemática y para resolver inecuaciones.

Contenido:

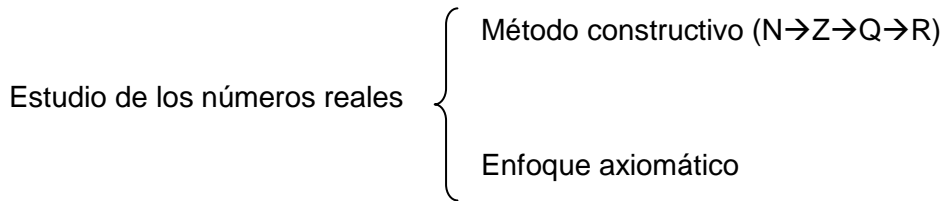
2.1 El conjunto de los números naturales: Concepto intuitivo de número natural. Definición del conjunto de los números naturales mediante los postulados de Peano. Definición y propiedades: adición, multiplicación y orden en los números naturales. Demostración por Inducción Matemática.

2.2 El conjunto de los números enteros: Definición a partir de los números naturales. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los enteros. Representación de los números enteros en la recta numérica.

2.3 El conjunto de los números racionales: Definición a partir de los números enteros. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los racionales. Expresión decimal de un número racional. Algoritmo de la división en los enteros. Densidad de los números racionales y representación de éstos en la recta numérica.

2.4 El conjunto de los números reales: Existencia de números irracionales (algebraicos y trascendentes). Definición del conjunto de los números reales; representación de los números reales en la recta numérica. Propiedades: adición, multiplicación y orden en los reales. Completitud de los reales. Definición y propiedades del valor absoluto. Resolución de desigualdades e inecuaciones.

Introducción



II.1. NÚMEROS NATURALES (N)

Postulados de Peano

El conjunto de los números naturales (**N**) es tal que:

- 1) $1 \in \mathbf{N}$
- 2) Para cada $n \in \mathbf{N}$ \exists un único $n^* \in \mathbf{N}$, llamado el **siguiente de n**
- 3) Para cada $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $n^* \neq 1$
- 4) Si $m, n \in \mathbf{N}$ y $m^* = n^*$ entonces $m = n$
- 5) Todo subconjunto S de **N**, que tenga las propiedades:
 - a) $1 \in S$
 - b) $k \in S$, implica que $k^* \in S$Es el mismo subconjunto **N**. (Principio de inducción)

Operaciones para los números naturales

Adición en N

Definición: Para dos números n y $m \in \mathbf{N}$, se tiene que:

- 1) $n + 1 = n^*$
- 2) $n + m^* = (n + m)^*$

Multiplicación en N

Definición: Para dos números n y $m \in \mathbf{N}$, se tiene que:

- 1) $n \cdot 1 = n$
- 2) $n \cdot m^* = (n \cdot m) + n$

Propiedades de la adición y multiplicación en N

- 1) $m + n \in \mathbf{N}$
 - 2) $m + (n + p) = (m + n) + p$
 - 3) $m + n = n + m$
 - 4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$
 - 5) $m(n + p) = m \cdot n + m \cdot p$
- $m \cdot n \in \mathbf{N}$
 $m(n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$
 $m \cdot n = n \cdot m$
Si $m \cdot p = n \cdot p \rightarrow m = n$

- ...Cerradura
- ... Asociatividad
- ... Conmutatividad
- ... Cancelación
- ... Distributiva

Inducción matemática

Sirve para demostrar la validez de cualquier enunciado relativo a \mathbf{N} , basándose en el quinto postulado de Peano.

Ejercicios tipo 1, sumatoria.

1) $\{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}\} \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = n^2; \forall n \in \mathbf{N}$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2; \forall n \in \mathbf{N}$

3) $2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2); \forall n \in \mathbf{N}$

$$4) \frac{2}{1(2)} + \frac{2}{2(3)} + \frac{2}{3(4)} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1}; \forall n \in \mathbf{N}$$

$$5) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}; \forall n \in \mathbf{N}$$

$$6) 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1); \forall n \in \mathbf{N}$$

Ejercicios tipo 2, multiplicación.

1) $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{n}) = n + 1; \forall n \in \mathbf{N}$

2) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{25}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}; \forall n \geq 2$

Ejercicios tipo 3, divisibles.

1) $2^{4n} - 1$ es divisible entre 15; $\forall n \in \mathbf{N}$

2) $6^n - 1$ es divisible entre 5; $\forall n \in \mathbf{N}$

3) $2^{2n} + 5$ es divisible entre 3; $\forall n \in \mathbf{N}$

4) $7 \cdot 16^{n-1} + 3$ es divisible entre 5; $\forall n \in \mathbf{N}$

5) $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$ es divisible entre 9; $\forall n \in \mathbf{N}$

6) $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ es divisible entre 12; $\forall n \in \mathbf{N}$

Ejercicios tipo 4, enunciados.

1) $n + n^2$ es un número par; $\forall n \in \mathbf{N}$

2) Cualquier polígono de n lados tiene D diagonales, donde $D = \frac{1}{2}n(n - 3)$

3) $\frac{2}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) \in \mathbf{N}; \forall n \in \mathbf{N}$

Ejercicios tipo 5, trigonométricos.

1) $\cos [(2n-1) \pi] = -1; \forall n \in \mathbf{N}$

2) $(\cos x) (\cos 2x) (\cos 4x) \dots (\cos 2^{n-1} x) = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}; \forall n \in \mathbf{N}$

Orden en los naturales

Ley de la tricotomía

Si m y $n \in \mathbf{N}$, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

- 1) $n < m$
- 2) $n = m$
- 3) $n > m$

Teorema: Para toda m, n y $p \in \mathbf{N}$:

- 1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
- 2) $m < n \rightarrow m \cdot p < n \cdot p$
- 3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

II.1. NÚMEROS ENTEROS (Z)

Dados dos números naturales n y m , si:

$$n + x = m \rightarrow x = m - n$$

Se pueden presentar tres casos:

- 1) $m > n \rightarrow x \in \mathbf{N}$
- 2) $m = n \rightarrow x = 0; x \in \mathbf{Z}$
- 3) $m < n \rightarrow x < 0; x \in \mathbf{Z}$

Definición:

$$\mathbf{Z} = \{x \mid x = m - n; \text{ con } m, n \in \mathbf{N}\} \quad \therefore \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$$

Propiedades de la adición y multiplicación en Z

- | | |
|---|--|
| 1) $m + n \in \mathbf{Z}$ | $m \cdot n \in \mathbf{Z}$ |
| 2) $m + (n + p) = (m + n) + p$ | $m (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ |
| 3) $m + n = n + m$ | $m \cdot n = n \cdot m$ |
| 4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$ | Si $m \cdot p = n \cdot p \rightarrow m = n$ |
| 5) $m + 0 = m$ | $m \cdot 1 = m$ |
| 6) $m + (-m) = 0$ | |
| 7) $m (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ | |

- ... Cerradura
- ... Asociatividad
- ... Conmutatividad
- ... Cancelación
- ... Elementos idénticos
- ... Elementos inversos
- ... Distributiva

Orden en los enteros

Teorema: Para toda m, n y $p \in \mathbf{N}$:

- 1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
- 2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $m \cdot p < n \cdot p$
Si $p < 0$: $m \cdot p > n \cdot p$
- 3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

II.1. NÚMEROS RACIONALES (Q)

Dados dos números enteros a y b, si:

$$b x = a \rightarrow x = \frac{a}{b}$$

Se pueden presentar tres casos:

- 1) b es factor de a $\rightarrow x \in \mathbf{N}$
- 2) b NO es factor de a, con $b \neq 0 \rightarrow x \in \mathbf{Q}$
- 3) $b = 0$ y $a \neq 0$: $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$
 $b = 0$ y $a = 0$: $\frac{a}{b}$ es indeterminado

Definición:

$$Q = \{x \mid x = \frac{a}{b}; \text{ con } a, b \in \mathbf{Z} \text{ y } b \neq 0\} \quad \therefore \mathbf{Z} \subset Q$$

Propiedades de la adición y multiplicación en Q

- | | | |
|---|----------------------------------|-------------------------|
| 1) $m + n \in \mathbf{Z}$ | $m \cdot n \in \mathbf{Z}$ | ...Cerradura |
| 2) $m + (n + p) = (m + n) + p$ | $m (n p) = (m n) p$ | ... Asociatividad |
| 3) $m + n = n + m$ | $m \cdot n = n \cdot m$ | ... Conmutatividad |
| 4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$ | Si $m p = n p \rightarrow m = n$ | ... Cancelación |
| 5) $m + 0 = m$ | $m \cdot 1 = m$ | ... Elementos idénticos |
| 6) $m + (-m) = 0$ | $m \cdot (1/m) = 1$ | ... Elementos inversos |
| 7) $m (n + p) = m n + m p$ | | ... Distributiva |

Operaciones sobre números racionales

Suma y resta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Teorema: Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Algoritmo de la división para los números enteros

Dados dos números enteros a y b con $b > 0$, existen dos enteros q y r, con $0 \leq r < b$, tal que:

$$a = b q + r$$

Densidad de los números racionales

Entre dos números racionales diferentes siempre hay otro número racional.

Teorema. $\forall X, Y \in Q$ con $X < Y$, $\exists Z \in Q$ tal que:

$$X < Z < Y$$

Ejemplo: Determinar los valores de a y $b \in \mathbf{Z}$, tales que:

1) $\frac{a}{b} = 1.08333 \dots$

2) $\frac{a}{b} = 0.8333 \dots$

3) $\frac{a}{b} = 0.7333 \dots$

4) $\frac{a}{b} = 1.772727 \dots$

5) $\frac{a}{b} = 0.9999 \dots$

6) $\frac{a}{b} = 0.5555 \dots$

7) $\frac{a}{b} = 0.3636 \dots$

8) $\frac{a}{b} = 1.4066 \dots$

9) $\frac{a}{b} = 1.259259 \dots$

10) $\frac{a}{b} = 0.1666 \dots$

11) $\frac{a}{b} = 0.875$

12) $\frac{a}{b} = 0.2222 \dots$

13) $\frac{a}{b} = 0.625$

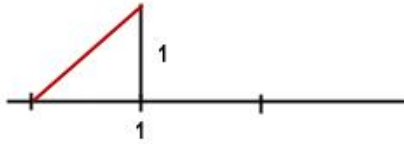
14) $\frac{a}{b} = 2.3333 \dots$

15) $\frac{a}{b} = 0.4285714285 \ 71 \dots$

Números Reales (R)

Al hacer uso del teorema sobre la **Densidad de los números racionales**, parecería que los números racionales cubren por completo la recta numérica, pero esto no es así.

A partir de proyecciones geométricas como la que se muestra a continuación sabemos que existen otros números llamados irracionales (\mathbb{Q}'), que ocupan espacios en la recta numérica.



Números Irracionales (\mathbb{Q}')

Se clasifican en: **Algebraicos** (raíces: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.) y **trascendentes** (π y e).

Los números irracionales son expresiones decimales no periódicas.

Números reales

Los números reales quedan definidos como la unión de racionales e irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Orden en R

Orden en los reales

Teorema: Para toda m, n y $p \in \mathbb{R}$:

- 1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
- 2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $m \cdot p < n \cdot p$
Si $p < 0$: $m \cdot p > n \cdot p$
- 3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

Valor absoluto y sus propiedades

Definición: Sea x un número real. El valor absoluto de x , que representamos con $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades más importantes del valor absoluto se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema:

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

- i) $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0$ si $x=0$
- ii) $|xy| = |x| |y|$
- iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Teorema:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$$

De manera general para cualquier expresión p en términos de x :

$$|p| > \alpha \begin{cases} p > \alpha \text{ (Desigualdad 1)} \\ p < -\alpha \text{ (Desigualdad 2)} \end{cases}$$

Unión de desigualdades

$$|p| < \alpha \begin{cases} p < \alpha \text{ (Desigualdad 1)} \\ p > -\alpha \text{ (Desigualdad 2)} \end{cases}$$

Intersección de desigualdades

Desigualdades:

1. $-3 + 5X > -2X + 11$; Solución: $X \in (2, \infty)$ ó $X > 2$
2. $\frac{1}{2} + 3X < -4X + \frac{1}{3}$; Solución: $X \in (-\infty, -\frac{1}{42})$
3. $\frac{2X-1}{X+2} < 5$ con $X \neq -2$; Solución: $X \in (-\infty, -\frac{11}{3}) \cup (-2, \infty)$
4. $\frac{2X-3}{X+2} < \frac{1}{3}$ con $X \neq -2$; Solución: $X \in (-2, \frac{11}{5})$
5. $\frac{3}{X} < 5$ con $X \neq 0$; Solución: $X \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{5}, \infty)$
6. $\frac{3X+8}{X-4} < 2$ con $X \neq 4$; Solución: $X \in (-16, 4)$
7. $X^2 - X - 2 > 0$; Solución: $X \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
8. $(3X + 2)^2 < X(X - 6)$; Solución: $X \in (-2, -\frac{1}{4})$
9. $(3X - 1)(2X + 4) < (3X - 1)(X + 5)$; Solución: $X \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$
10. $3 + |X - 2| > 4$; Solución: $X \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
11. $2|X - 3| - 3 > -\frac{2}{3}|X - 3| - 2$; Solución: $X \in (-\infty, \frac{21}{8}) \cup (\frac{27}{8}, \infty)$
12. $|X^2 - 16| > 0$; Solución: $X \in R$ con $X \neq \mp 4$
13. $-|3X - 2| > -2$; Solución: $X \in (0, \frac{4}{3})$
14. $|4X - 1| < |2 - X|$; Solución: $X \in (-\frac{1}{3}, \frac{3}{5})$ con $X \neq \frac{1}{4}$ en una solución
15. $|3 - 2X| < |2 + X|$; Solución: $X \in (\frac{1}{3}, 5)$ con $X \neq \frac{3}{2}$ en una solución