

Álgebra

Capítulo

4

Polinomios

Objetivo

El alumno usará y analizará los conceptos del álgebra de los polinomios y sus propiedades para obtener raíces.

Tema	Contenido
4.1	Definición de polinomio. Grado de un polinomio. Igualdad de polinomios. Definición y propiedades: adición, sustracción y multiplicación de polinomios.
4.2	División de polinomios: Divisibilidad y algoritmo de la división. Teoremas del residuo y del factor. División sintética.
4.3.	Raíces de un polinomio: Definición de raíz, teorema fundamental del álgebra y número de raíces de un polinomio.
4.4.	Técnicas elementales para buscar raíces: Posibles raíces racionales, regla de los signos de Descartes, teoremas sobre raíces irracionales conjugadas y complejas conjugadas.

Polinomios

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

Definición

Etimológicamente la palabra polinomio está compuesta por los vocablos griegos poli (gr. polys) que significa muchos o pluralidad y nomio (gr. nomos) que significa termino. De tal forma que a través de su etimología un polinomio queda definido como la suma de muchos términos.

Cuando los polinomios tienen uno, dos o tres términos, se acostumbra llamarlos monomio, binomio y trinomio respectivamente. Cuando contamos con más de tres términos se acostumbra llamarlos simplemente, "polinomios".

Matemáticamente un polinomio queda definido como:

Un polinomio en X con coeficientes complejos es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Donde:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son los coeficientes del polinomio y pertenecen a \mathbb{C} .

Los exponentes son: $\{n \mid n \in \mathbb{Z}^+, 0\}$.

4.1.2. Grado de un polinomio

Sea el polinomio en x con coeficientes complejos: $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$

Si $a_n \neq 0$ el entero no negativo n es el grado del polinomio, lo que representamos con:

$$\text{gr}(p) = n$$

Para comenzar con el estudio de los polinomios, se estudiará en primera instancia el concepto de igualdad y posteriormente las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de polinomios.

4.1.3. Igualdad de polinomios

Dos polinomios se consideran iguales si tienen los mismos términos, sin importar aquellos que tengan coeficiente cero.

Ej. Si $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 2$ y $g(x) = 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 4x^2 + x - 2$, entonces $f(x) = g(x)$

4.1.4. Operaciones entre polinomios

Las operaciones que se estudiarán en este capítulo son:

- o Suma
- o Resta
- o Multiplicación y
- o División

Adición de polinomios

Para sumar dos polinomios en X con coeficientes complejos, basta con sumar los coeficientes asociados a las literales con exponentes iguales.

$$\begin{array}{r} \text{Ej. Si } f(x) = -x^4 - 2x^2 + x + 2 \\ g(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 - x - 5 \\ \hline f(x) + g(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 3 \end{array}$$

Grado del polinomio suma

Sean dos polinomios cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ con coeficientes complejos y con la misma variable, entonces el grado del polinomio suma ($gr(f+g)$) puede tomar los siguientes valores:

- 1) Si $gr(f) > gr(g) \rightarrow gr(f+g) = gr(f)$
- 2) Si $gr(f) < gr(g) \rightarrow gr(f+g) = gr(g)$
- 3) Si $gr(f) = gr(g) \rightarrow gr(f+g) < n$; donde "n" es el grado de los polinomios.

Sustracción de polinomios

Definición. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en X con coeficientes en C , el polinomio $f(x) - g(x)$ se define como: $f(x) + [-g(x)]$

Es decir, a un primer polinomio le sumamos el inverso aditivo de un segundo, o dicho de forma coloquial, restamos los coeficientes asociados a las literales con exponentes iguales.

$$\begin{array}{r} \text{Ej. } f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 + 3x - 5 \\ g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 8 \\ \hline f(x) - g(x) = 3x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 13 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios

Estudiaremos la multiplicación de polinomios a través del siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} \text{Ej. } f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x \\ g(x) = 8x^2 - x + 5 \\ f(x) \cdot g(x): \\ \begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 3x \\ 8x^2 - x + 5 \\ \hline 20x^3 - 10x^2 + 15x \\ - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\ \hline 32x^5 - 16x^4 + 24x^3 \\ \hline 32x^5 - 20x^4 + 46x^3 - 13x^2 + 15x \end{array} \end{array}$$

La manera en la que se multiplican dos polinomios no difiere de la multiplicación aritmética de números o de la multiplicación de binomios. En primera instancia debemos ordenar ambos polinomios a través de sus exponentes, ya sea de forma creciente o decreciente. En nuestro caso se ordenaron a los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ de forma decreciente. Posteriormente se elige un polinomio, del cual se tomarán cada uno de sus términos (comenzando por el de menor grado) para multiplicar al otro polinomio. En nuestro caso elegimos a $g(x)$ para que cada uno de sus términos multiplique al polinomio $f(x)$.

Comenzamos con: $5(4x^3 - 2x^2 + 3x)$

Posteriormente: $-x(4x^3 - 2x^2 + 3x)$

Y finalmente: $8x^2(4x^3 - 2x^2 + 3x)$

Lo que resta para concluir con la multiplicación de polinomios es, sumar términos semejantes.

La adición y multiplicación de polinomios satisface las propiedades que se enuncian a continuación.

Teorema. Si $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ son polinomios en X con coeficientes complejos, entonces:

- 1) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$ → Asociatividad
- 2) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ → Conmutatividad
- 3) $f(x) + \theta(x) = f(x)$ → Elemento idéntico
- 4) $f(x) + [-f(x)] = \theta(x)$ → Elemento inverso

División de polinomios

Ej. $f(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 7$
 $g(x) = x^2 - 3$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Polinomio cociente} \\
 \text{Polinomio divisor} \quad \overline{) \text{ Polinomio dividendo} \\
 \underline{2x^3 + x^2 + 3x - 1} \\
 2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 7 \\
 \underline{-2x^5 \quad + 6x^3} \\
 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 7 \\
 \underline{-x^4 \quad + 3x^2} \\
 + 3x^3 - x^2 + 7 \\
 \underline{-3x^3 \quad + 9x} \\
 -x^2 + 9x + 7 \\
 \underline{x^2 \quad - 3} \\
 9x + 4 \\
 \text{Polinomio residuo}
 \end{array}$$

Ej. $f(x) = -5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 5$
 $g(x) = x - 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)}:$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{-5x^3 - x^2 - 3x + 5} \\
 x-1 \overline{-5x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 5} \\
 \underline{5x^4 - 5x^3} \\
 - x^3 - 2x^2 + 8x - 5 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 - 3x^2 + 8x - 5 \\
 \underline{3x^2 - 3x} \\
 5x - 5 \\
 \underline{-5x + 5} \\
 0
 \end{array}$$

Teorema del residuo.

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en \mathbb{C} y $\alpha \in \mathbb{C}$. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$ es igual a $p(\alpha)$.

Teorema del factor.

$x - \alpha$ es factor de $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$.

División sintética

Como su nombre lo indica sirve para realizar de una manera abreviada la división de dos polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x - a$.

Para el ejemplo anterior, si realizamos la división de polinomios a través de la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -5 & 4 & -2 & 8 & -5 \\
 1 & & -5 & -1 & -3 & 5 \\
 \hline
 & -5 & -1 & -3 & 5 & 0
 \end{array}$$

En la primera posición a la izquierda, está escrita la raíz del polinomio divisor. El primer renglón de la división sintética, son los coeficientes del polinomio dividendo. Estos deben estar ordenados previamente en orden decreciente para el exponente de x , y los términos que no aparezcan deberán ser incluidos también escribiendo "0" en la posición que corresponda.

4.3. Raíces de un polinomio

Definición. α es raíz de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Teorema fundamental del álgebra

Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en \mathbb{C} de grado mayor o igual a uno, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en \mathbb{C} .

Número de raíces de un polinomio

El número de raíces de un polinomio está determinado por su grado.

Factores lineales

Si α es raíz de $p(x)$, entonces $(x-\alpha)$ es factor de $p(x)$.

En general, para un polinomio de grado "n":

$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son las raíces de $p(x)$.

Ej. Expresar a $p(x)$ como el producto de sus factores lineales, si $p(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$.
Y $\alpha_1 = -1$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = 3$ son tres de las cuatro raíces del polinomio.

Ej. Determinar si 0, -2, 3/2, e i, son raíces de $p(w) = 2w^4 - w^3 - w^2 - w - 3$

Ej. Hallar el valor de $k \in \mathbb{Z}$ tal que 1 sea raíz de $p(x) = 2x^4 - kx^3 + kx^2 - kx + 3$.

4.4. Técnicas para buscar raíces

Para el cálculo de las raíces de un polinomio emplearemos los siguientes métodos:

1. Posibles raíces racionales
2. Gráfica de un polinomio
3. Cambio de signo en el residuo
4. Cotas de las raíces reales
5. Regla de los signos de Descartes
6. Cambio de variable
7. Raíces complejas e irracionales conjugadas

Posibles raíces racionales

Dado un polinomio cualquiera con coeficientes complejos, las raíces de este pueden ser reales o complejas. Si son reales estas se pueden dividir en racionales e irracionales.

Este método nos ayuda para elegir POSIBLES raíces racionales, es decir, valores que serán usados con la división sintética y establecer cuáles de ellos si son raíces. Se complementa con otros métodos como cotas superior e inferior de las raíces reales y tabla de Descartes.

Método:

Aplicable para cualquier polinomio con coeficientes complejos, de la forma:

$$P(x) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_nX^n$$

1. Consiste en tomar el coeficiente del término independiente (a_0) y el coeficiente del término de mayor grado (a_n).
2. Obtener los factores de a_0 y a_n (términos positivos y negativos entre los cuales es divisible de manera exacta).
3. Realizar todas las combinaciones posibles del cociente $\frac{a_0}{a_n}$

Ej. Si $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$, determinar las posibles raíces racionales, las raíces del polinomio y expresarlo como el producto de sus factores lineales.

Ej. Si $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{A}{2}x^2 - x + 6$

a) Determinar el valor de A, si $f(2) = 0$.

b) Determinar las raíces de $f(x)$ y expresarlo como el producto de sus factores lineales.

Gráfica de un polinomio y cambio de signo en el residuo

Teorema. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en \mathbb{R} . Si a y b son dos números reales tales que $a < b$ y $p(a)$, $p(b)$ tienen signos contrarios, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz real α en el intervalo $a < \alpha < b$.

Cotas de las raíces reales

Sea $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ un polinomio en x con coeficientes reales y $a_n > 0$.

- i. Si $S \in \mathbb{R}$, $S > 0$, y no existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética de $p(x)$ entre $x - S$, entonces para toda raíz real α de $p(x)$ se tiene que $\alpha < S$.
- ii. Si $t \in \mathbb{R}$, $t < 0$, y los números del tercer renglón de la división sintética de $p(x)$ entre $x - t$ son alternadamente positivos y negativos, entonces para toda raíz real α de $p(x)$ se tiene que $t < \alpha$. Los ceros podrán considerarse positivos o negativos a efecto de lograr los signos alternados.

Regla de los signos de Descartes

Teorema. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$:

- i) El número de raíces reales positivas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio $p(x)$, o menor que éste en un número par.
- ii) El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio $p(-x)$, o menor que éste en un número par.

Nota: Solo se consideran los coeficientes distintos de cero

Cambio de variable

Si en un polinomio el coeficiente del término lineal es cero y los exponentes de los otros términos son múltiplos entre sí, entonces es aplicable el cambio de variable.

El objetivo de este método es trabajar con un polinomio de menor grado que el polinomio original. Se toma la variable de menor grado (sin considerar al término independiente si éste existe) y se cambia por otra variable de grado uno (lineal).

Posteriormente se procede de la misma manera que en los otros métodos para la obtención de las raíces del polinomio con el cambio de variable.

Finalmente se debe regresar al polinomio a su variable original, incluyendo las raíces encontradas para el polinomio con el cambio de variable.

Ej. Determinar las raíces de los polinomios a través de cambio de variable, si:

a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 2$

b) $p(x) = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$

Raíces complejas conjugadas e irracionales conjugadas.

Complejas conjugadas

Teorema. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en \mathbb{R} y $a, b \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = a + bi$ es raíz de $p(x)$, entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ también será raíz del polinomio.

Irracionales conjugadas

Teorema. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en \mathbb{Q} y $a, b \in \mathbb{Q}$. Si $\alpha = a + \sqrt{b}$ es raíz de $p(x)$, entonces $\bar{\alpha} = a - \sqrt{b}$ también será raíz del polinomio.

$p(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2 + kx - 12$ Determinar $k \in \mathbb{R}$. tal que $\alpha = 1 - i$ sea raíz de $p(x)$.

Un poco de humor

