Capítulo 3. Limites y continuidad

Objetivo: El alumno calculará el límite de una función real de variable real y analizará la continuidad de la misma.

Contenido:

3.1 Concepto de límite de una función en un punto. Interpretación geométrica.

3.2 Existencia de límite de una función. Límites de las funciones constante e identidad. Enunciados de teoremas sobre límites. Formas determinadas e indeterminadas. Cálculo de límites.

3.3 Definición de límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito. Cálculo de límites de funciones racionales cuando la variable tiende a infinito. Límites infinitos.

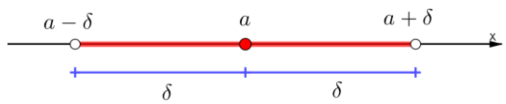
3.4 Obtención del límite de sen x, cos x, y (sen x) / x cuando x tiende a cero. Cálculo de límites de funciones trigonométricas.

3.5 Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Enunciados sobre teoremas de continuidad.

3.1. Concepto de límite de una función en un punto. Interpretación geométrica

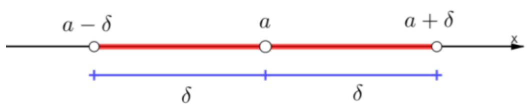
Se llama entorno o vecindad de un punto a con radio δ en $\mathbb{R}$, al conjunto de valores x que se encuentren dentro del intervalo abierto

$$Q(a,\delta) = (a-\delta\,, a+\delta);\ |x-a| < \delta$$
$$Donde\ \delta\ es\ el\ radio\ del\ intervalo$$

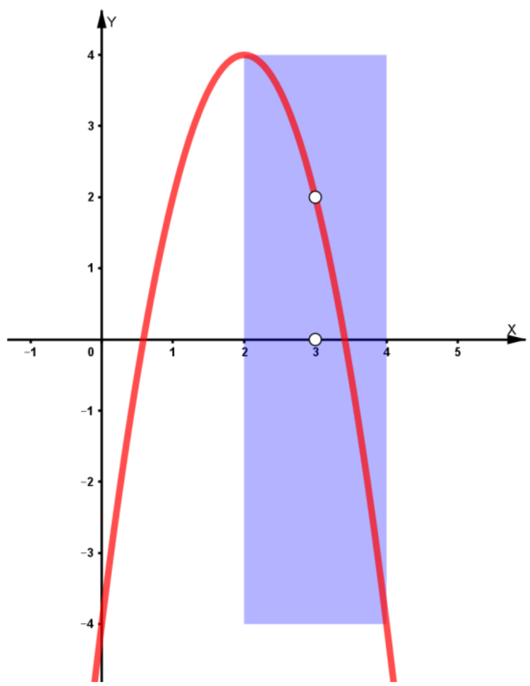


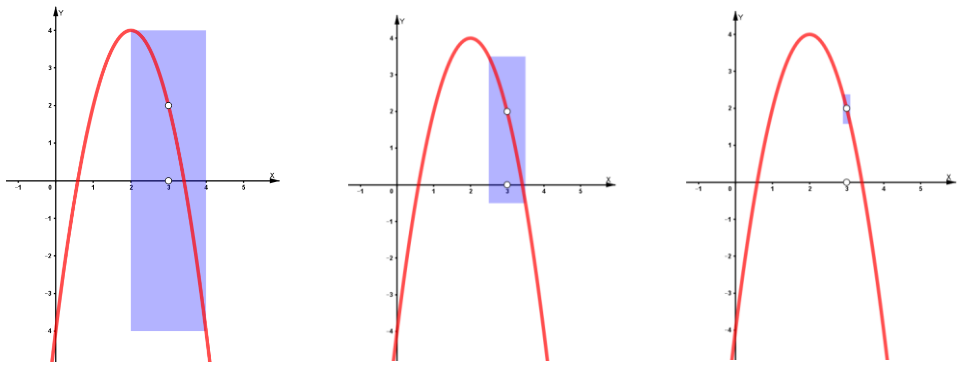
El punto a es el punto central del intervalo, pero podemos incluirlo o no. Cuando se excluye, decimos que se trata de un entorno reducido.

$$Q'(a,\delta) = (a-\delta\,, a+\delta)\ con\ x \neq a;\ 0 < |x-a| < \delta$$

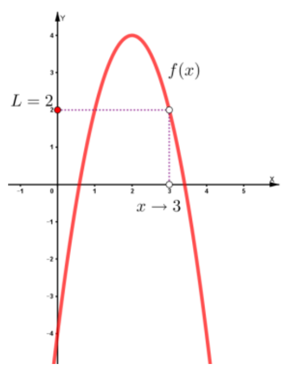


Si este concepto lo llevamos a un espacio bidimensional, por ejemplo, para $f(x)=-2x^2+8x-4$ vamos a determinar el entorno reducido $Q'(3\,,1)$ en el plano cartesiano.
El punto x=3 es el centro del entorno y nunca será parte del intervalo. El radio δ es 1, y lo llamaremos Δx=1. En los extremos del intervalo trazamos una línea vertical hasta que cortemos a la curva.





Se puede reducir el área de la región rectangular hasta llegar a un radio infinitamente pequeño



Esta es la esencia del concepto *límite de una función*

Definición de límite

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L , si para todo número épsilon mayor que cero, por pequeño que éste sea, existe un número delta mayor que cero, tal que $f(x)$ menos L en valor absoluto es menor que épsilon, siempre que x menos a en valor absoluto es mayor que cero y menor que delta.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad si\ \forall\ \ \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$$
$$tal\ que\ |f(x) - L| < \varepsilon \ \ siempre\ que\ 0 < \ |x - a| < \delta$$

3.2. Existencia de límite de una función. Límites de las funciones constante e identidad. Enunciados de teoremas sobre límites. Formas determinadas e indeterminadas. Cálculo de límites.

Límite de la función constante

$$\lim_{x \to a} cte = cte$$

Límite de la función identidad

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Teoremas sobre límites

a) Una función no puede tener dos límites distintos cuando $x \to a$ (unicidad)
b) Si dos funciones son iguales en un entorno reducido de un punto, y una de ellas tiene límite, entonces la otra también tiene límite y ambos son iguales.
c) Si una función es positiva en un entorno reducido de un punto, su límite en él no puede ser negativo.
d) Si una función es negativa en un entorno reducido de un punto, su límite en él no puede ser positivo.
e) Si en un entorno reducido de un punto, cierta función f se mantiene acotada entre otras dos funciones, y éstas tienen límites iguales en el punto, entonces la función f también tiene límite y su valor es el de los límites iguales.

Teoremas sobre operaciones con límites

1. $\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)\,, donde\ c\ es\ una\ constante$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ con\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

Cálculo de límites

Forma determinada
Ej. $\lim_{x\to 4} 2x + 7 = 15$

Forma indeterminada
Cuando se presentan algunas de las siguientes formas

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Hay que buscar simplificar para encontrar el límite.

Ej. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{0}{0}$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 1 = 3$$

El procedimiento es avalado por el teorema que dice *"Si dos funciones son iguales en un entorno reducido de un punto, y una de ellas tiene límite, entonces la otra también tiene límite y ambos son iguales"*

Ej. Determinar algebraicamente el valor de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4-4x^3+5x^2-6x+8}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$
4. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-x-12}{x^3+27}$
5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$
7. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
8. $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$
9. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{9-x^2}{\sqrt{12+x}-3}$
10. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+20}-5}$
11. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{2-x}$
12. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt[4]{22-x}-2}{4-\sqrt{22-x}}$

3.3. Definición de límite de una función cuando la variable independiente tiende a infinito. Cálculo de límites de funciones racionales cuando la variable tiende a infinito. Límites infinitos.

3.4. Obtención del límite de sen x, cos x, y (sen x) / x cuando x tiende a cero. Cálculo de límites de funciones trigonométricas.

3.5. Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Enunciados sobre teoremas de continuidad.