Capítulo 4. La derivada y aplicaciones

Objetivo: El alumno aplicará la derivada de una función real de variable real en la resolución de problemas.

Contenido:

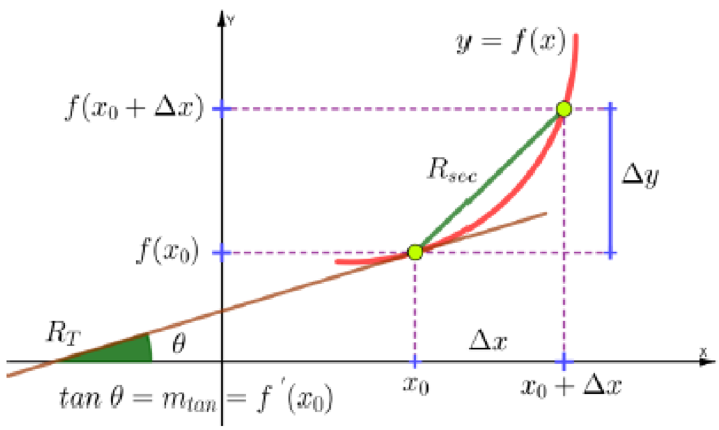
4.1. Definición de la derivada de una función en un punto. Interpretación física y geométrica. Notaciones y cálculo a partir de la definición. Función derivada.
4.2. Derivación de la suma, producto y cociente de funciones. Derivación de una función elevada a un exponente racional. Derivación de una función elevada a un exponente real y a otra función.
4.3. Derivación de la función compuesta. Regla de la cadena. Derivación de la función inversa.
4.4. Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas. Derivación de las funciones hiperbólicas directas e inversas.
4.5. Definición de derivadas laterales. Relación entre derivabilidad y continuidad.
4.6. Derivación de funciones expresadas en las formas implícita y paramétrica.
4.7. Definición y cálculo de derivadas de orden superior.
4.8. Aplicaciones geométricas de la derivada: dirección de una curva, ecuaciones de la recta tangente y la recta normal, ángulo de intersección entre curvas.
4.9. Aplicación física de la derivada como razón de cambio de variables relacionadas.
4.10. Conceptos de función diferenciable y de diferencial, e interpretación geométrica. La derivada como cociente de diferenciales.

4.1. Definición de la derivada de una función en un punto. Interpretación física y geométrica. Notaciones y cálculo a partir de la definición. Función derivada.

Se llama derivada de una función en el punto $x0$, al valor del límite de la razón de cambio de la variable dependiente con respecto de la variable independiente, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica



$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Esto nos indica que la derivada se puede emplear para conocer la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto en particular, cuando conocemos la función de la curva.

Interpretación física

Ej. Sabemos que la velocidad de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme es la relación de la distancia recorrida entre el tiempo empleado para hacerlo.

$$V = \frac{d}{t}; \ V=\frac{f(t)}{t}$$

En esta expresión, estamos comparando la distancia entre dos puntos diferentes para valores diferentes de tiempo, por lo que en realidad estamos calculando una velocidad promedio

$$V_{prom} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Si a esta velocidad promedio le aplicamos el operador límite cuando Δt tiende a cero, obtenemos un concepto conocido como velocidad instantánea, que es la velocidad de un cuerpo en un momento en particular.

$$V_{instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

Esto nos indica que la derivada se puede emplear para conocer la velocidad instantánea del movimiento de un cuerpo en un momento en particular, cuando conocemos la función del movimiento.

Notación de Derivadas

La notación de derivadas se ha desarrollado en términos de cómo la interpretaron los distintos matemáticos, siendo las más usuales:

Autor	Notación	Interpretación
Lagrange	$f'(x)$ y'	La derivada es una nueva función
Cauchy	$D_x f(x)$ $D_x y$	La derivada es un operador lineal
Leibniz	$\frac{d}{dx}f(x)$ $\frac{dy}{dx}$	La derivada es un cociente de diferenciales
Newton	$\dot{f}(x)$ $\dot{y}$	La derivada es una nueva función

Cálculo a partir de la definición

Ej. Obtener el valor de la derivada de la función $f(x)$=x^2 en el punto P(2 ,4)

De la definición de derivada

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Al evaluar en la función, esto se desarrolla en

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [4 + \Delta x] = 4$$

Este desarrollo se conoce como “Método de los cuatro pasos” para resolver derivadas, y no es más que resolver el límite de la definición eliminando la indeterminación.

Ej. Obtener el valor de la derivada de la función $f(x)$=x^2 en el punto P(x ,y)

De la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(\mathrm{x})}{\Delta x}$$

Al evaluar en la función, esto se desarrolla en

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\mathrm{x} + \Delta x)^2 - (\mathrm{x})^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{x} + 2\mathrm{x}\Delta x + (\Delta x)^2 - \mathrm{x}^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\mathrm{x}\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [2\mathrm{x} + \Delta x] = 2\mathrm{x}$$

Función Derivada

Es la función que se obtiene después de aplicar el operador derivada a una función, y el dominio de la función derivada estará determinado por todos los valores donde la función original es derivable, es decir, donde existe el límite de la definición.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. Si una función tiene derivada en un punto de su dominio, se dice que es derivable en él.
2. Si una función tiene derivada en todos los puntos de un intervalo abierto, entonces se dice que es derivable en ese intervalo.

El dominio de la función derivada siempre será un subconjunto del dominio de la función que le dio origen

$$D_{f'} \subset D_f$$

4.2. Derivación de la suma, producto y cociente de funciones. Derivación de una función elevada a un exponente racional. Derivación de una función elevada a un exponente real y a otra función.

A continuación, se muestran las reglas de derivación algebraica mas comunes, escritas en notación de Leibniz y Cauchy.

Reglas de derivación algebraica

1. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
2. $\frac{d}{dx}(cte) = 0$
3. $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \cdots$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$
6. $\frac{d}{dx}(u^n) = n\, u^{n-1}\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c\frac{dv}{dx}}{v^2}$
10. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{u}\right) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$

Ej. Obtener las siguientes derivadas

1. $y = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 7$
2. $y = \frac{-4}{x^2 + x - 2}$
3. $y = (x^2 - 6x + 1)^3$
4. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 3}$
5. $y = -2x^5(5x^2 + 3x - 7)^2$
6. $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$
7. $y = \frac{1 - 3x}{2x} + (8x - 5)^4$

Reglas de derivación exponenciales y logarítmicas

1. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \, \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u^v) = v\, u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \; con\; u > 0$
5. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$

Ej. Obtener las siguientes derivadas

1. $y = x + \ln x$
2. $y = x\, e^x$
3. $y = \frac{\ln x}{e^x}$
4. $y = 2^{4x}$
5. $y = e^{1-5x}$
6. $y = \ln \sqrt[3]{x^2}$
7. $y = \ln\left(\frac{e^x}{x-7}\right)$
8. $y = (4x^2)^{2x^3}$
9. $y = \log_5 3x^2$
10. $y = 3^{2x^2+x-5}$

4.3. Derivación de la función compuesta. Regla de la cadena. Derivación de la función inversa.

Derivación compuesta (Regla de la cadena)

En el *Capítulo 3 (funciones)*, estudiamos una función la cual puede ser el resultado de la composición entre otras dos funciones (*función composición,* $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$).

Ej. Si $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x+5}$ donde $f(x) = \sqrt{g(x)}\; y\; g(x) = 2x + 5$. Esto también puede escribirse como $y = f(u) = \sqrt{u}\; donde\; u = 2x + 5$

Si se requiere derivar a y con respecto de x, aun cuando sabemos que y está en función de u.

La derivación compuesta es el mecanismo que permite derivar a la función $y = f(u)$ con respecto de la variable u como si esta fuera la variable independiente, para después multiplicar este resultado por la derivada de u con respecto de x.

$$\mathbf{D_x y = D_u y \cdot D_x u} \ ; \quad \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \cdot \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$$

Esto permite dos cosas:
1) Generalizar las fórmulas de derivación usando el argumento genérico u
2) Simplificar algunos cálculos con derivadas para funciones con varias dependencias ligadas

Ej. Obtener la derivada de la función $f(x) = \sqrt{2x+5}$ a través de la regla de la cadena

$$D_u\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \ ; \ D_x(2x+5) = 2 \ ; \ \therefore D_x y = D_u y \cdot D_x u = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}}$$

Ej. Obtener la derivada de la función $y = \left(\frac{2-x^3}{x^2+3}\right)^2$ a través de la regla de la cadena

Ej. Obtener la derivada de la función $y = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$ a través de la regla de la cadena

Ej. Obtener la derivada de la función $y = \sqrt{(3x^2+1)^2 - 2}$ a través de la regla de la cadena

Derivación de la función inversa

El procedimiento natural para obtener la derivada de la función inversa de $y = f(x)$ es:
1) Determinar si la función admite inversa
2) Obtener la inversa
3) Encontrar su derivada

También podemos emplear el siguiente teorema:
Si $y = f(x)$ admite inversa con $D_x y \neq 0$, entonces se cumple que:

$$\mathbf{D_y x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{D_x y}} \ ; \quad \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}} = \frac{\mathbf{1}}{\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}}$$

Es decir, la derivada de la función inversa es el inverso multiplicativo de la derivada de la función directa (cambiando además "y" por "x").

Ej. Derivar la función inversa de **f(x) = 4x – 8**

Ej. Derivar la función inversa de $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x-5}}{\mathbf{x+5}}$

Ej. Derivar la función inversa de $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{x-1}}$

4.4. Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas. Derivación de las funciones hiperbólicas directas e inversas.

Reglas de derivación de funciones trigonométricas directas e inversas

$D_x sen\, u = \cos u\ \ D_x u$
$D_x \cos u = -sen\, u\, D_x u$
$D_x \tan u = \sec^2 u\ \ D_x u$
$D_x \cot u = -\csc^2 u\ \ D_x u$
$D_x \sec u = \sec u \tan u\ \ D_x u$
$D_x \csc u = -\csc u \cot u\ \ D_x u$
$D_x ang\ sen\, u = \dfrac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
$D_x ang\ cos\, u = \dfrac{-D_x u}{\sqrt{1-u^2}}$
$D_x ang\ tan\, u = \dfrac{D_x u}{u^2+1}$
$D_x ang\ cot\, u = \dfrac{-D_x u}{u^2+1}$
$D_x ang\ sec\, u = \dfrac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$
$D_x ang\ csc\, u = \dfrac{-D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$

Reglas de derivación de funciones trigonométricas hiperbólicas directas e inversas

$D_x senh\, u = \cosh u\ \ D_x u$
$D_x \cosh u = senh\, u\, D_x u$
$D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u\ \ D_x u$
$D_x \coth u = -\operatorname{csch}^2 u\ \ D_x u$
$D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\ \ D_x u$
$D_x \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u\ \ D_x u$
$D_x ang\ senh\, u = \dfrac{D_x u}{\sqrt{u^2+1}}$
$D_x ang\ cosh\, u = \dfrac{D_x u}{\sqrt{u^2-1}}\ ; u > 1$
$D_x ang\ tanh\, u = \dfrac{D_x u}{1-u^2}\ ;\ -1 < u < 1$
$D_x ang\ coth\, u = \dfrac{D_x u}{1-u^2}\ ;\ -1 > u > 1$
$D_x ang\ sech\, u = \dfrac{-D_x u}{u\sqrt{1-u^2}}\ ;\ 0 < u < 1$
$D_x ang\ csch\, u = \dfrac{-D_x u}{|u|\sqrt{u^2+1}}\ ; u \neq 0$

Ej. Obtener las siguientes derivadas

1. $y = sen(x^2 + 3)$
2. $y = cos^2 3x$
3. $y = \tan\sqrt{2x}$
4. $y = \cot(x+1)^2$
5. $y = \text{ang sen}\sqrt{x}$
6. $y = \text{ang cos}\, e^x$
7. $y = 4 \operatorname{senh} x \cosh x$
8. $y = 2 \operatorname{sech} e^x$
9. $y = \dfrac{\cos x}{x}$
10. $y = \dfrac{\cos 4x}{1 - \operatorname{sen} 4x}$

4.5. Definición de derivadas laterales. Relación entre derivabilidad y continuidad.

Como se vio en el tema de límites, en ocasiones necesitamos trabajar con límites en los extremos de una función o en cambios de regla de correspondencia, lo que dio origen a los límites laterales.

En las derivadas ocurre de la misma manera, ya que al ser ésta un límite, también la podemos manejar de manera lateral, con lo que definimos a continuación:

Derivada lateral por la izquierda

$$f'_{(-)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(\mathrm{x})}{\Delta x}$$

Derivada lateral por la derecha

$$f'_{(+)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(\mathrm{x})}{\Delta x}$$

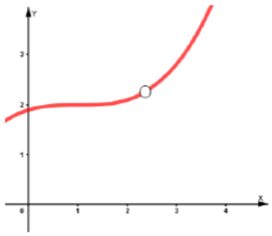
Si para un punto en particular, las derivadas laterales existen y son iguales, decimos que la derivada completa existe.

$$f'_{(-)}(x_0) = f'_{(+)}(x_0) \rightarrow f'^{(x_0)} \; existe$$

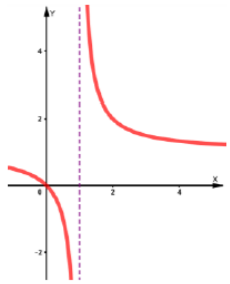
Pero, si las derivadas laterales son diferentes en un mismo punto, significa que la derivada en ese punto no existe, porque no cumple el teorema de unicidad de los límites.

$$f'_{(-)}(x_0) \neq f'_{(+)}(x_0) \rightarrow f'^{(x_0)} \; no\ existe$$

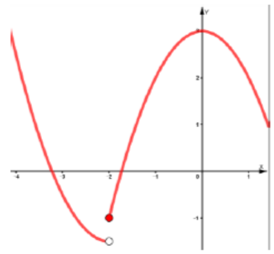
Existe una relación directa entre continuidad y derivabilidad. De hecho, una función solo será derivable cuando sea continua.



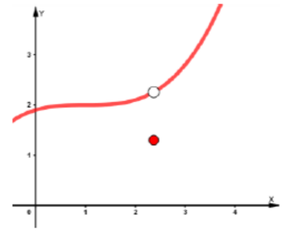
Hoyo



Asíntota vertical



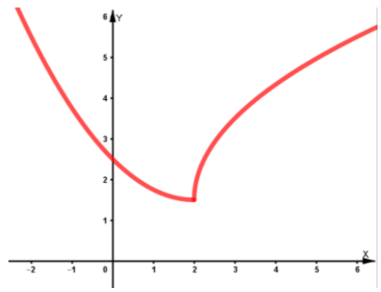
Salto



Punto fugado

Si la función no es continua, entonces no es derivable.

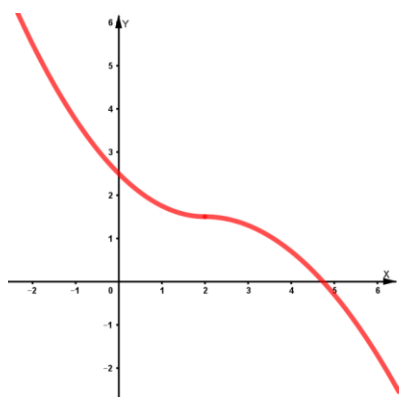
Sin embargo, aunque la función sea continua, esto no asegura que sea derivable.



Función NO derivable en x=2

En esta ilustración se observa que la función es continua puesto que nunca se interrumpe, sin embargo, cuando x=2 presenta un cambio brusco en su dirección, indicando que no es derivable en ese punto. Esto ocurre porque las derivadas laterales en el punto son diferentes, por lo que el teorema de Unicidad de los límites no se cumple.

De ahí surge el siguiente teorema: “Si una función es derivable, entonces es continua”



Función derivable

4.6. Derivación de funciones expresadas en las formas implícita y paramétrica.

Derivación en forma implícita

En las funciones implícitas, la variable dependiente no se encuentra despejada, por lo que al derivarla estamos obligados a aplicar la regla de la cadena.

Entonces, podemos derivar a la variable dependiente y como si se tratará de la variable independiente x, pero al hacerlo, tendremos que multiplicarla por y'

Ej. Derivar $\mathbf{2x^5 - x = 3y^3 + 2y + 8}$

Derivación en forma paramétrica

Dada una función en forma paramétrica de la forma:

$$\boldsymbol{f(x)}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x = f(t)} \\ \boldsymbol{y = g(t)} \end{cases}$$

Al derivar y aplicar *la regla de la cadena* $\boldsymbol{D_x y = D_t y \cdot D_x t}$; $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}}$

Aplicando el teorema de derivación inversa $\boldsymbol{D_x t = \frac{1}{D_t x}} \rightarrow \boldsymbol{D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

Ej. Obtener las siguientes derivadas

1. $\mathrm{f(x)}\colon \begin{cases} \mathrm{x = 2t^2 - t} \\ \mathrm{y = \sqrt{t} - 1} \end{cases}$

2. $\mathrm{f(x)}\colon \begin{cases} \mathrm{x} = 4\cos t \\ \mathrm{y} = 3\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$

4.7. Definición y cálculo de derivadas de orden superior.

Derivada	Lagrange	Cauchy	Leibniz	Newton
1ª	$f'(x)\ y'$	$D_x f(x)\ D_x y$	$\frac{dy}{dx}$	$\dot{f}(x)\ \dot{y}$
2ª	$f''(x)\ y''$	$D_x^2 f(x)\ D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\ddot{f}(x)\ \ddot{y}$
3ª	$f'''(x)\ y'''$	$D_x^3 f(x)\ D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\dddot{f}(x)\ \dddot{y}$
4ª	$f^{(4)}(x)\ y^{(4)}$	$D_x^4 f(x)\ D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	No la usa
nª	$f^{(n)}(x)\ y^{(n)}$	$D_x^n f(x)\ D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	No la usa

Derivadas de orden superior

Ej. Obtener la primera, segunda y tercera derivada de la función f(x) = $2x^3-x^2+3x-4$

Ej. Obtener la primera, segunda y tercera derivada de la función f(x) = sen(x) cos(x)

Ej. Obtener la primera y segunda derivada de la función f(x) = $\ln(5x^2+1)$

Derivadas de orden superior para funciones implícitas

Ej. Obtener la primera, segunda y tercera derivada de la función **2x + xy = 5 - y**

Derivadas de orden superior para funciones paramétricas

Ej. Obtener la primera, segunda y tercera derivada de la función:

$$\mathrm{f(x)}: \begin{cases} \mathrm{x} = 2\,\mathrm{sen}\, t \\ \mathrm{y} = -\cos t \end{cases}$$

Si se considera que:

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \frac{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}} \quad y\ que\ \frac{d^2y}{\mathrm{dx}^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}}$$

4.8. Aplicaciones geométricas de la derivada

Se utilizará la derivada para determinar:

a. La pendiente de la recta tangente en un punto dado

b. Los puntos de una curva donde su recta tangente es:

- Paralela a una recta conocida
- Perpendicular a una recta conocida

c. Las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a una curva en un punto dado

d. El ángulo de intersección entre dos curvas

4.8.a. Pendiente de la recta tangente en un punto dado

La pendiente de la recta tangente en un punto dado se calcula, evaluando la derivada de la función en el punto requerido (x_0), es decir:

$$\boldsymbol{m = f'(x_0)}$$

Ej. 1. Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en el punto P(2,-1), si:

$$f(x) = -1 + \sqrt{9-(x-5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-5)}{\sqrt{9-(x-5)^2}};\ f'(2) = \frac{3}{0} \to \infty\ ; m = tan\theta \to \infty\ \therefore\ \theta = ang\tan\infty = 90°$$

Ej. 2. Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en el punto P(-1,-2), si:

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x;\ f'(-1) = m = -2 \therefore\ \theta = ang\tan -2 \cong -63.43° + 180° \cong 116.57°$$

Ej. 3. Determinar los ángulos que forman con el eje x las tangentes a la curva

$$(x-4)^2 + y^2 = 4; y \geq 0$$

En los puntos $P(2,0), Q(3,\sqrt{3}), R(4,2)$

Ej. 4. Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en el punto de abscisa x=-1, si:

$$f(x): \begin{cases} x = -2\cos^2\theta \\ y = 3\cos\theta \end{cases}$$

4.8.b. Puntos de una curva donde su recta tangente es paralela a una recta conocida

Ej. 1. Determinar los puntos en los que las tangentes a la curva de ecuación

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{11x^3}{3} - 3x^2$$

Son paralelas al eje x.

Ej. 2. Determinar los puntos de la curva de ecuación

$$y = \frac{5}{1-2x}$$

Donde la tangente es paralela a la recta de ecuación

$$2x - 5y - 5 = 0$$

Ej. 3. Obtener la ecuación de la parábola **$y=x^2+bx+c$** que es tangente a la recta **y=x** en el punto **P(1,1)**

4.8.b. Puntos de una curva donde su recta tangente es perpendicular a una recta conocida

Ej. 1. Determinar los puntos de la curva de ecuación

$$y^2 = 2x^3$$

Donde la tangente es perpendicular a la recta de ecuación

$$4x - 3y + 3 = 0$$

4.8.c. Ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a una curva en un punto dado

Conceptos previos:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ej. 1. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = 2x^2 - 5x + 6$$

En el punto P(2,4)

Ej. 2. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva de ecuación

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

En el punto $P(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

4.8.d. Ángulo de intersección entre dos curvas

Conceptos previos:

$$\theta = ang \tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)$$

Ej. 1. Determinar el ángulo de intersección que forman al cortarse las curvas:

$$y = \frac{x^2}{2} \;\; ; \;\; x^2 + y^2 = 3$$

a. Se encuentran los puntos de intersección
b. Se obtienen las pendientes de las rectas tangentes en los puntos de intersección
c. Se obtiene el ángulo de intersección entre las rectas

Ej. 2. Demostrar que la elipse $\mathbf{2x^2 + y^2 = 6}$ y la parábola $\mathbf{y^2 = 4x}$ se cortan en un ángulo recto, es decir, son curvas ortogonales.

Ej. 3. Determinar el ángulo agudo de intersección que forman al cortarse las curvas:

$$y = \frac{1}{x} \ ; \quad y = x^3$$

4.9. Aplicaciones físicas de la derivada