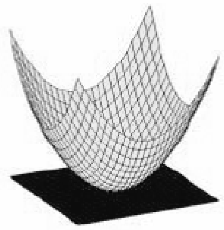
# DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



SERIE No **“ 2”** 2010-2

***“ÁLGEBRA VECTORIAL”***

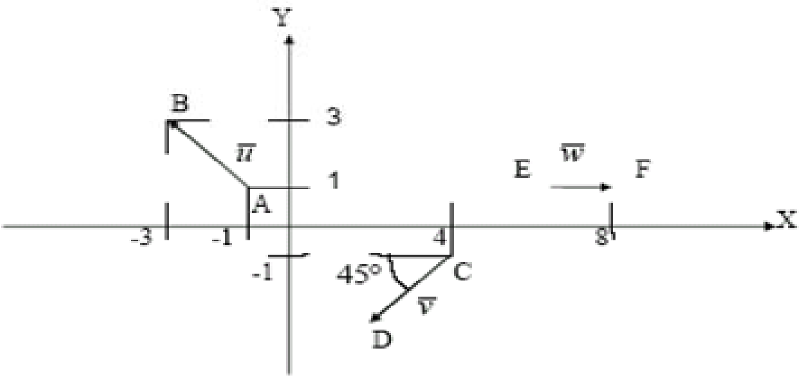
**1**.-Sea C(2, -3, 5) el punto medio del segmento dirigido $\overline{AB}$ . Empleando álgebra vectorial, determinar las coordenadas de los puntos A y B, si las componentes escalares de $\overline{AB}$ sobre los ejes coordenados X, Y y Z son 4, -8 y 2 respectivamente.

**2**.-Sea el punto P que está contenido en el plano YZ, está a dos unidades de distancia del origen de coordenadas, de ordenada negativa y cuyo vector de posición forma un ángulo de 30° con el eje Z; y sea el punto Q(4, 8, $2\sqrt{3}$ ). Empleando álgebra vectorial, calcular la distancia entre los puntos P y Q.

**3**.-Sean los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ , tales que $\left|\overline{u}\right|$ = 15 y $\left|\overline{v}\right|$ = 5. Si el vector $\overline{u}$ tiene la misma dirección que el vector $\overline{a}$ = 3i + 4j y si el vector $\overline{v}$ tiene la misma dirección que el vector $\overline{c}$ = (-8, 0, 6), empleando álgebra vectorial:

a) calcular el ángulo que forman los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ ;
b) obtener el módulo del vector $\overline{u}$ + $\overline{v}$ (sugerencia: utilizar la ley de los cosenos).
c) determinar las componentes del vector $\overline{u} + \overline{v}$.

**4**. Sean los vectores $\overline{u}$ , $\overline{v}$ y $\overline{w}$ que se muestran en la siguiente figura:

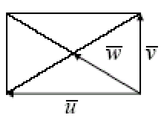


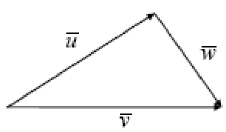

Determinar:
a) La componente escalar de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{w}$ .
b) La componente vectorial de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{w}$ .
c) La componente escalar de $\overline{u}$ en la dirección de $\overline{v}$ .
d) La componente vectorial de $\overline{v}$ en la dirección de $\overline{u}$ .

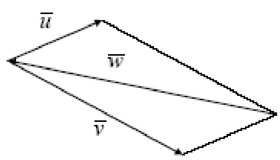
Si el valor absoluto de la componente escalar de $\overline{w}$ en la dirección de $\overline{u}$= $\sqrt{2}$, determinar:

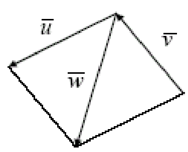
e) Las componentes del vector $\overline{w}$.
f) Las coordenadas del punto E.

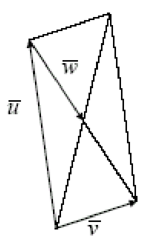
**5**. Para los vectores $\overline{u}$ , $\overline{v}$ y $\overline{w}$ que se muestran en las siguientes figuras, expresar $\overline{w}$ en términos de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ .

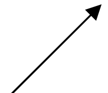
a)



b)



c)



d)



e)


**6.**- Sea el triángulo cuyo vértices son los puntos A( -1, 2 , 0), B(5, -1 , 3) y C(4,0,-2). Determinar un vector unitario que sea simultáneamente perpendicular a los lados de dicho triángulo.

**7.**- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tales que $|\bar{u}|$ = 3 y $|\bar{v}|$ = 4 y que forman un ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ radianes.

a) Calcular $\bar{u} \cdot \bar{v}$

b) Haciendo uso de algunas propiedades del producto escalar calcular $|\bar{u} + \bar{v}|^2$

**8.**- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tales que:

El vector $\bar{u}$ forma ángulos de 60° y 45° con los ejes X y Y, respectivamente.

El vector $\bar{v}$ forma ángulos de 30° y 60° con los ejes Y y Z, respectivamente.

Calcular el ángulo que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ (hay dos soluciones).

**9.**- Sea el punto B que está contenido en el plano XZ. Si su vector de posición $\bar{b}$ tiene módulo igual a $\sqrt{8}$ y forma 45° con los vectores unitarios **i** y **k**, determinar:

a) las coordenadas cartesianas del punto B,

b) los cosenos directores del vector $\bar{b}$ , y

c) la componente vectorial del vector $\bar{b}$ en la dirección del vector unitario k.

**10.** Sean los vectores:

$$\bar{u} = 3i - 2j + 5k$$
$$\bar{v} = (2, 1, 0)$$
$$\bar{w} = (-2, 5, 4)$$

Determinar:

a) Un vector $\bar{x}$ tal que: $4\bar{u} - 3\bar{v} + 2\bar{x} = \bar{w}$

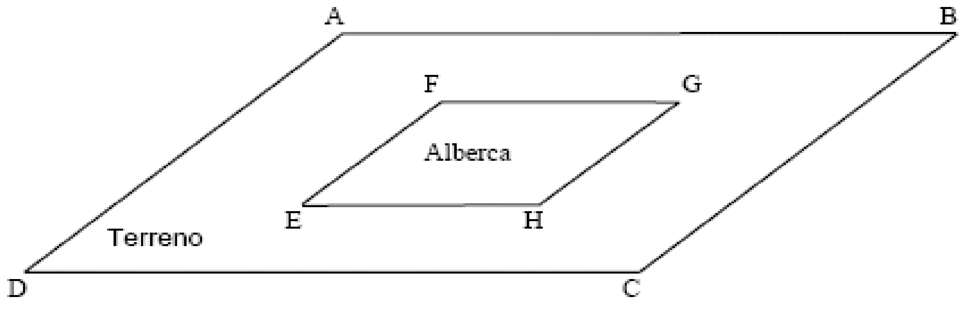
b) Un vector $\bar{a}$ , perpendicular a $\bar{v}$ y a $\bar{v}$ , cuyo módulo sea $4\sqrt{14}$

**11.** Sea el punto A que pertenece al eje de las ordenadas, y cuya distancia al origen es igual a 6; y sea el punto B contenido en el plano XZ, cuyo vector de posición forma un ángulo de 60° con el eje de las abscisas y de módulo igual a 10.

Empleando álgebra vectorial, calcular la distancia entre los puntos A y B.

**12.** En las instalaciones de un centro deportivo se desea construir una alberca cuya área sea de 160 $m^2$ . Si el proyecto arquitectónico exige que los lados de la alberca sean paralelos a los lados del terreno, con los datos que se dan a continuación y con ayuda de la figura, determinar vectorialmente las coordenadas de los puntos G y H.

A(0, 0, 3), B(0, 22, 3), C(30, 22, 3), D(30, 0, 3), E(19, 7, 3), F(3, 7, 3), G(g1, g2, g3), y H(h1, h2, h3).




Hay 2 posibles soluciones. Interpretarlas.

**13.** Sean los vectores:

$$\bar{u} = (0, b, c)$$
$$\bar{v} = (-2, 1, -3)$$
$$\bar{w} = 4i + j -2k$$

Determinar los valores de b y c tales que la componente escalar de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{v}$ sea igual a $\sqrt{\sqrt{14}}$ y la de $\bar{u}$ en la dirección de $\bar{w}$ sea igual a $\sqrt{21}$.

**14.** Sean los puntos A(3, 1, 2), B(7, 1, 10), C(1, 4, 3), utilizando álgebra vectorial:

a) comprobar que forman un triángulo rectángulo.
b) calcular el área de dicho triángulo.

**15**. Sean los vectores $\bar{a}$ = (1,2,2 ) y $\bar{b}$ = ( 2,1, − 2 ) perpendiculares entre sÍ y tales que son los vectores de posición de los puntos A y B respectivamente.
Determinar las coordenadas de un punto C tal que sea vértice de un cubo de 3 unidades por lado, si los puntos A, B y el origen también son vértices del cubo.

**16**.-Sean los puntos A(5, 1, 1); B(-3, 3, 1); C(-7, -3, 5) y D(-5, -7, 7), que pertenecen a un mismo plano. Determinar las coordenadas de los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD},\ y\ \overline{DA}$, y demostrar que tales puntos son los vértices de un paralelogramo. Calcular el área de dicho paralelogramo.

**17.**- Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ , tales que:

$$\left|\bar{u} \times \bar{v}\right| = 8 \qquad y \qquad \bar{u} \cdot \bar{v} = 2$$

calcular el ángulo formado por los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ .

**18.** Sea el vector $\bar{u}$, dos de cuyos cosenos directores son:

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad \cos(\beta) = \frac{1}{2}$$

Obtener un vector $\bar{v}$ cuyo módulo sea igual a 18 unidades y que tenga la misma dirección del vector $\bar{u}$ .

**19.** Los puntos A(1, − 2,2) y B (1, −1,1 ) son los vértices de un triángulo ABC. Determinar el conjunto de valores de la cota z de un punto C(1, − 4, $z$ ), tercer vértice del triángulo, para cada una de las siguientes condiciones:

a) que el ángulo interior en el vértice A sea de 30°
b) que el triángulo tenga 3 unidades de área.

**20**. Sean los puntos: A(1, 2, 3), B(0, 3, 1), y C(-1, 4, -1), y sea el vector $\bar{u}$ = (3, -3, -3).

Calcular:

a) la componente escalar del vector $\overline{AB}$ en la dirección del vector $\bar{u}$
b) la componente vectorial del vector $\bar{u}$ en la dirección del vector $\overline{AB}$ .
c) el ángulo que forman los vectores $\overline{AB}$ y $\bar{u}$.
d) el producto escalar entre los vectores $\overline{AC}$ y $\bar{u}$.

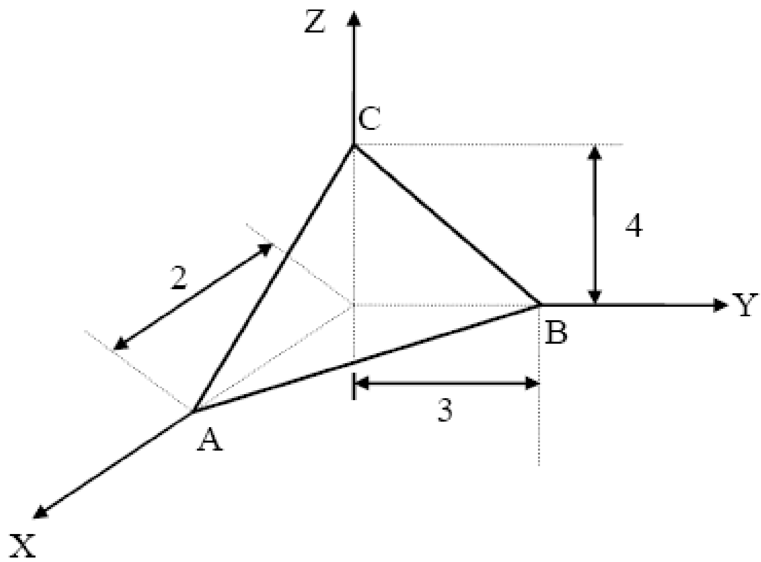
**21.** Sea el vector $\bar{a}$ , paralelo al plano YZ, que forma un ángulo de 30° con el vector j, y tal que $|\bar{a}|$ = 10; y sea el vector $\bar{u}$ , paralelo al plano XY, que forma ángulos de 45° con los vectores i y j, y tal que $|\bar{u}|$ = 2 .

Determinar:

a) Las componentes de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{u}$ .
b) Las componentes de un vector $\bar{c}$ , perpendicular a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{u}$, y tal que $|\bar{c}| = 2\sqrt{5}$.

Nota: Para los vectores $\bar{a}$ y $\bar{c}$, hay dos soluciones.

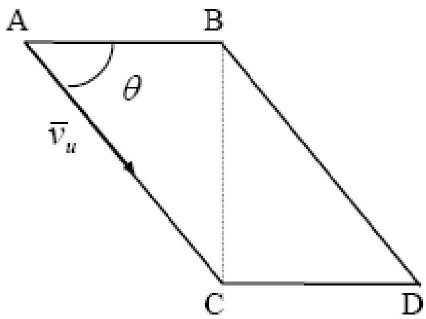
**22**. Para los datos que se muestran en la figura



Determinar

a) los cosenos directores del segmento dirigido $\overline{AB}$ ;
b) el área del triángulo ABC;
c) el ángulo que forman los segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ;
d) las componentes de un vector unitario que sea normal al plano definido por los puntos A, B y C.
e) las coordenadas cartesianas del punto P que es el simétrico del punto C con respecto al eje Y;
f) el producto escalar entre el vector unitario i y el vector representado por el segmento dirigido $\overline{AC}$ ;
g) la componente escalar del segmento dirigido $\overline{CB}$ en la dirección del eje Y;
h) la componente vectorial del vector cuyo segmento dirigido es $\overline{AC}$, en la dirección del vector cuyo segmento dirigido es $\overline{BA}$.

**23.** Sean los puntos A, B, C y D los vértices de un paralelogramo.




Si A(1, 0, 4), B(1, 3, 4), $\overline{V}_U = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ y si la diagonal BC es paralela al eje X, determinar:

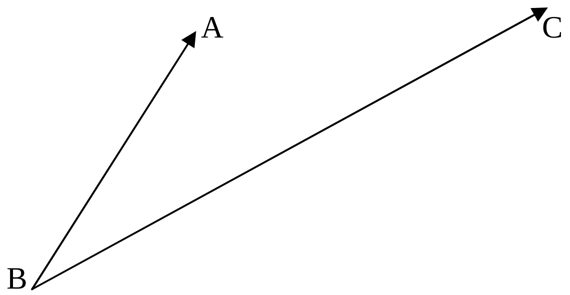
a) El ángulo θ .
b) Las coordenadas de los vértices C y D.
c) El área del paralelogramo.

**24.** Sea el triángulo que tiene por vértices a los puntos: A(-2, 6, 1), B(7, 5, 3) y C(-4, 5, 2), y sea L el segmento de recta que une los puntos medios de los lados AC y BC. Utilizando álgebra vectorial:

a) Calcular el ángulo que forman el segmento L y el lado AB.

b) Determinar la relación que existe entre la longitud del segmento L y la longitud del lado AB.

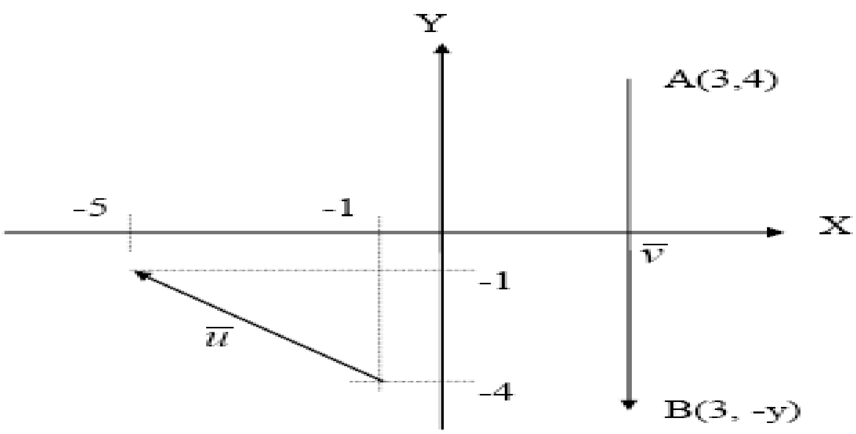
**25.** Sean los puntos A(5, 2, 6); B(1, 2, 3) y C(9, 4, 9). Determinar la componente vectorial de $\overline{BC}$ en la dirección de $\overline{BA}$ , y representarla gráficamente en la figura.




**26**. Sea el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos A(0, 1, 1), B(0, -3,4) y C(0, a, b). Tomando en consideración que el ángulo recto es el formado por los lados BA y BC, determinar los valores de a y de b para los cuales el área del triángulo es igual a 25 unidades de superficie (Nota: existen dos soluciones).

**27.** Calcular todos los valores de ***"y"*** y ***"z"*** tales que la componente escalar de $\bar{a}= (1,y,z)$ sobre $\bar{b}=2i-\sqrt{5}j$ y sobre $\bar{c}=(-2, \sqrt{5},0)$ sea igual a cero.

**28.** Sean los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ que se muestran en la figura:



Si el $\left|Comp.Vect.\overline{V}_{\bar{u}}\right| = 6$ (MÓDULO DE LA COMPONENTE VECTORIAL) , determinar:

a) $Comp.Esc.\overline{U}_{\bar{v}}$
b) $Comp.Vect.\overline{U}_{\bar{v}}$
c) $Comp.Esc.\overline{V}_{\bar{u}}$
d) Las coordenadas del punto B.
e) $Comp.Vect.\overline{V}_{\bar{u}}$

**29.** Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dos vectores de los cuales se sabe que:

$$\left|\bar{u}\right| = 2 \qquad \bar{v} = (2, -1, 2) \qquad \bar{u}\cdot\bar{v} = 3$$

Calcular el área del paralelogramo que tiene como lados a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ .

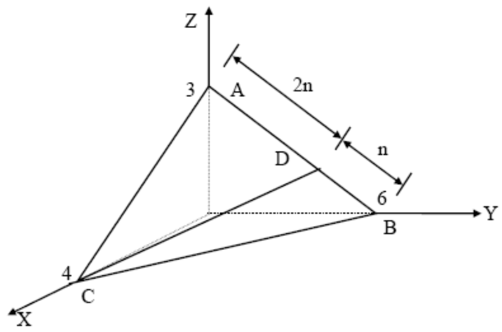
**30.** Empleando álgebra vectorial, determinar las coordenadas de todos los puntos sobre el eje X que están a 6 unidades del punto P(2, $\sqrt{11}$ , 3).

**31**. Determinar las componentes de un vector perpendicular al eje Y, cuyo módulo es $5\sqrt{2}$ y forma ángulos iguales con los ejes X y Z.

**32**. Dados los puntos: A(7, 3, -1), B(5, 4, -3) y C(8, 2, -1), obtener:

a) el ángulo interior del triángulo ABC con vértice en A;
b) la componente escalar de $\overline{AC}$ en la dirección de $\overline{AB}$ ;
c) el vector unitario en la dirección de $\overline{AB}$;
d) la componente vectorial de $\overline{AC}$ en la dirección de $\overline{AB}$ .

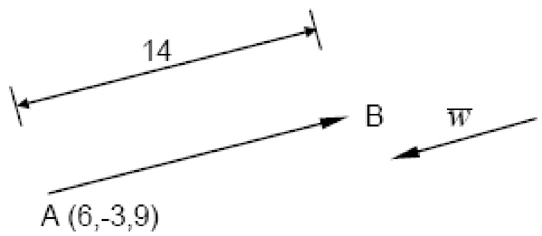
**33.** Para los puntos A, B, C y D de la siguiente figura:




Obtener el vector $\bar{s} = 2\overline{CD} + 3\overline{BC}$

**34.** Sean los puntos A(1,2,3), B(-1.3,2) y C(3,1,-2). Determinar las coordenadas del punto D del paralelogramo formado por los vectores $\overline{AB}$ $y$ $\overline{AC}$ . Calcular el área del paralelogramo.

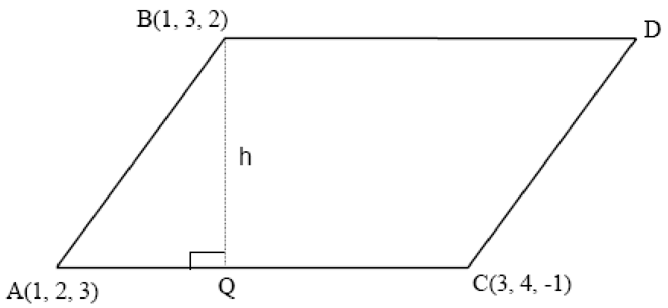
**35.** Sea el segmento dirigido $\overline{AB}$, paralelo al vector $\bar{w}$ = (2,−3, 6) y de sentido contrario a éste, como se muestra en la figura




Determinar las coordenadas del punto B

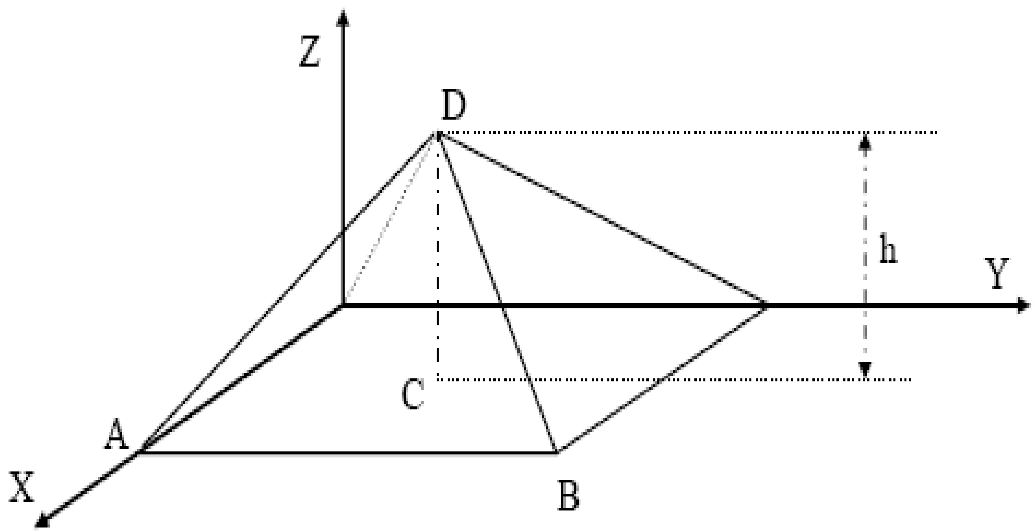
**36.** Sean los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ tales que $\bar{u} = -2\,j$, $\left|\bar{v}\right| = 4$, $\left|\bar{w}\right| = 2$ y $\left|\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\right| = -4$. Si además el vector $\bar{u}$ forma 30° con el vector $\bar{v}$, determinar el ángulo que forma el vector $\bar{w}$ con un vector perpendicular tanto a $\bar{u}$ como a $\bar{v}$ .

**37.** Sea el paralelogramo que se muestra en la figura:

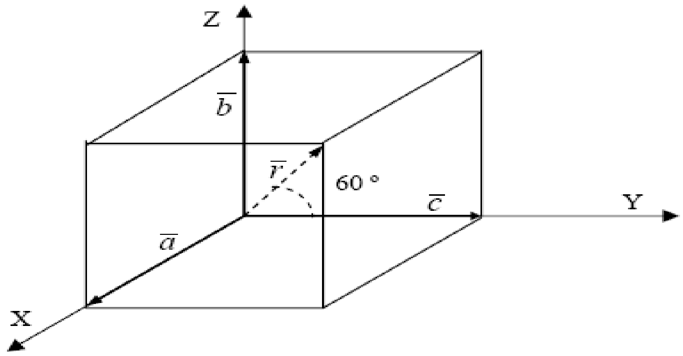



Calcular:
a) la altura h;
b) la distancia entre los puntos A y Q.
c) el área del paralelogramo.
Determinar las coordenadas del vértice D.

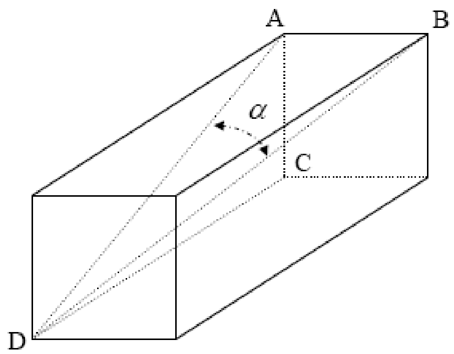
**38.** Para la pirámide regular que se muestra en la figura, tal que la longitud de cada una de sus aristas es 4 unidades, **utilizando álgebra vectorial** determinar:
a) Las coordenadas del punto D, si la arista DB es paralela al vector $\upsilon = (-4, -4, 4\sqrt{2}\ )$
b) La altura h.
c) El área de la cara triangular ABD.



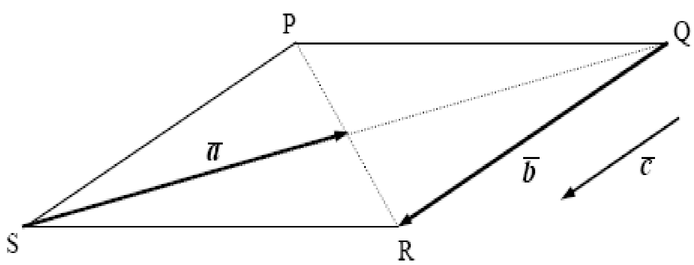
**39.** Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ $y$ $\bar{r}$ que se muestran en la figura tales que $|\bar{a}| = 3$ , $|\bar{b}| = 4$ y el ángulo que forman los vectores $\bar{c}$ $y$ $\bar{r}$ es 60°. Obtener las componentes del vector $\bar{r}$.




**40.** Sea el paralelepípedo rectangular que se muestra en la figura Xx
Si las aristas AB y AC son de igual longitud, en tanto que la arista CD mide el triple que la AC, emplear álgebra vectorial para determinar el ángulo α que forman los segmentos DA y DB, así como para calcular el área del triángulo ABD.

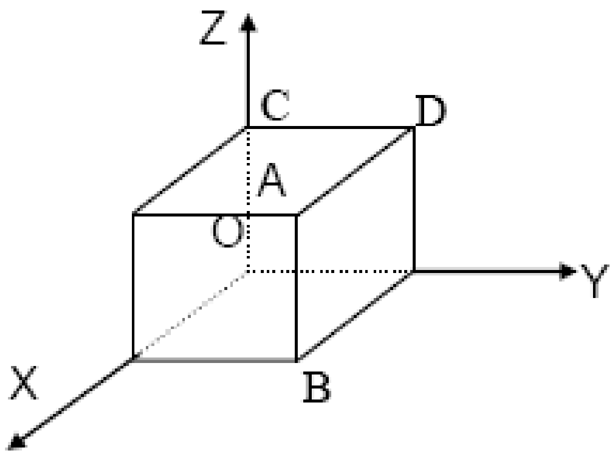



**41**. Sean los vectores $\bar{a}$ **,** $\bar{b}$ y $\bar{c}$ que se muestran en la figura



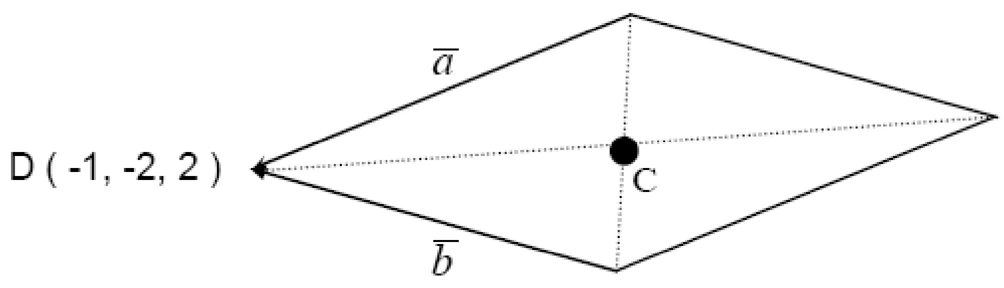
Si $\bar{a} = -i + 2j - 4k$ y $\bar{b}$ es paralelo al vector $\bar{c} = \left(\frac{2}{3}, -1, 2\right)$ tal que $|\bar{b}| = \mathbf{7}$, mediante álgebra vectorial calcular el área del paralelogramo PQRS.

**42.** Sea el cubo que se muestra en la figura




Calcular, mediante algebra vectorial:
a) El ángulo que forma la arista CD con la diagonal BC.
b) El área del triángulo que tiene por vértices a los puntos B, C y D, si la longitud de cada arista es igual a L .
c) Los cosenos directores del vector AO.

**43.** Sea el paralelogramo que se muestra en la figura




en donde

$\bar{a}$ =(1,2 ,6)
$\bar{b} = -3i - 2k$

Determinar las coordenadas cartesianas del punto C y calcular los ángulos interiores del paralelogramo.

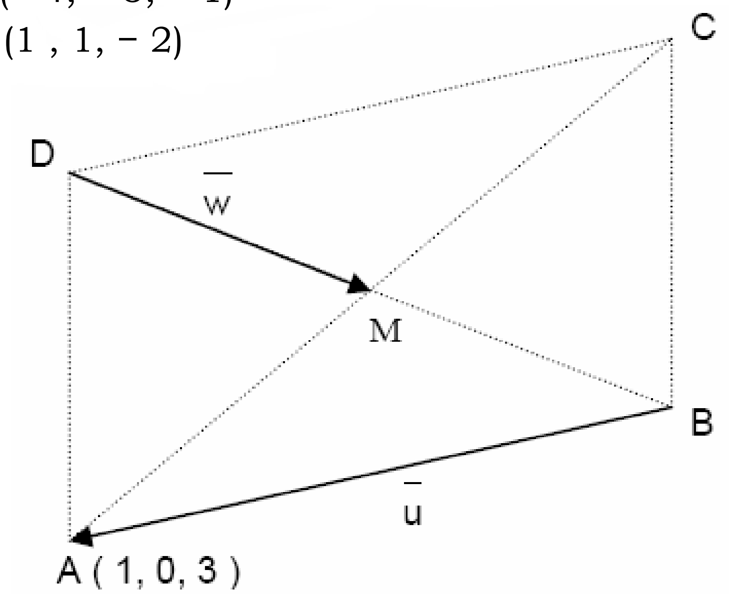
**44.** Obtener las componentes escalares de un vector $\bar{a}$ que se encuentra en el primer octante, forma un ángulo de 60° con el eje X y 45° con el eje Z, si además su componente paralela al eje Y es de 8 unidades.

**45**. Sean los puntos A(0,0,0), B(4,2,4); C(2,2,2), y D(2,4,4) vértices de un paralelepípedo. Calcular el volumen de dicho paralelepípedo si tres de sus aristas concurrentes son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.

**46.** Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura.

$\bar{u} = (-4, -3, -1)$

$\bar{w} = (1, 1, -2)$




a) Determinar las coordenadas cartesianas de los puntos B, C, D y M.
b) Calcular el área del triángulo BCM.

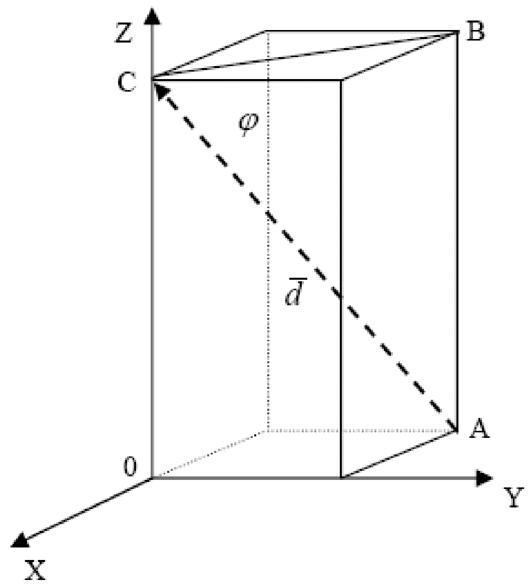
**47**. Dados los vectores $\bar{c} = (-1, 3, -1)$ y $\bar{w} = -i + 2k$, obtener:

a) Un vector $\bar{v}$ que sea perpendicular tanto a $\bar{c}$ como a $\bar{w}$ y que tenga módulo $\sqrt{6}$
b) Un vector $\bar{u}$ de módulo igual a $2\sqrt{15}$, que sea perpendicular a $\bar{w}$ y forme un ángulo de 60° con el eje "Y".

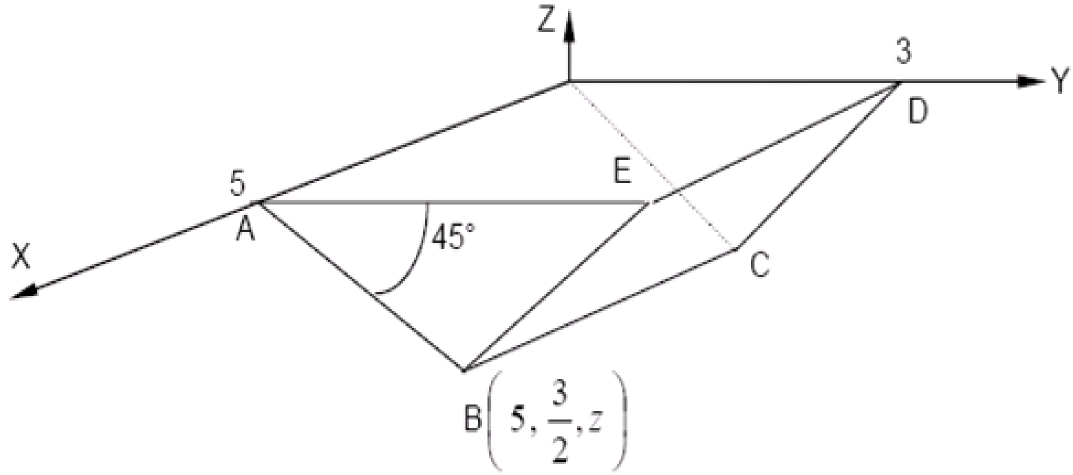
**48.** Sea el vector $\bar{d} = 2i - 3j + 6k$ que corresponde a la diagonal AC del paralelepípedo rectangular mostrado en la figura.

a) Determinar las coordenadas del punto B.

b) Calcular el ángulo φ que forman el vector $\bar{d}$ y la diagonal BC de la cara superior.
c) Calcular la distancia del punto B a la diagonal AC.




**49** Sea el prisma triangular de la figura tal que el punto C pertenece al plano YZ, el segmento BC es paralelo al eje X y el punto E pertenece al plano XY.




Determinar:

a) La coordenada $z$ del punto B.

b) La longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ .

c) El área de la cara BCDE.

**50.**- Sea el paralelogramo ABCD que se muestra en la figura, donde $\overline{BC} = (0,2,-2)$. Determinar:

a) Las coordenadas del punto E.
b) Las coordenadas del punto F.
c) El área del triángulo ACD.